ZUR BEWEGUNG EINES PUNKTES AUF ROTATIONSFLÄCHEN BEI WIRKUNG EINES AUF DER ROTATIONSACHSE GELEGENEN ANZIEHUNGSZENTRUMS

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

VORGELEGT

VON

MARTHA NIEMÖLLER
AUS LEIPZIG

HALLE (SAALE)
DRUCK VON EHRHARDT KARRAS G.M.B.H.
1919

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Januar 1919.
Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Wangerin.

Meinem Vater.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung. Über die Zurückführbarkeit der die Bewegung eines Punktes auf Rotationsflächen darstellenden Integrale auf elliptische 1

I. Bestimmung der Rotationsflächen, für welche die Bewegung auf elliptische Integrale führt für die Kräftefunktion $U = -\frac{\mu}{2}\varrho^2$ . . 5

II. Bestimmung der Flächen für die Kräftefunktion $U = \frac{\mu}{2\varrho^2}$ 25

III. Bestimmung der Flächen für die Kräftefunktion $U = \frac{\mu}{\varrho}$ 41

Einleitung.

Die Bewegung eines Punktes, der gezwungen ist, auf einer Rotationsfläche mit der Gleichung $F(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ zu bleiben, wird dargestellt durch die Integrale:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} t = \int \dfrac{r\sqrt{dr^2+dz^2}}{\sqrt{2r^2[U+h]-c^2}}, \\ \varphi = c\int \dfrac{\sqrt{dr^2+dz^2}}{r\sqrt{2r^2[U+h]-c^2}}. \end{cases}$$

In diesen Integralen bezeichnet U die nur von den Koordinaten des angezogenen Punktes abhängige Kräftefunktion, r^2 ist zur Abkürzung für x^2+y^2 gesetzt, c und h sind die von den Anfangsbedingungen, denen der Punkt mit der Masse eins unterworfen ist, abhängige Konstante, die Flächengleichung ist auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, φ bedeutet den Winkel zwischen der Meridianebene des Punktes und der xz-Ebene. Bei welcher Beschaffenheit von U und $F(r,z) = 0$ die Integrale (A) hyperelliptische werden, denen als Spezialfall die elliptischen zuzuzählen sind, wurde von P. Stäckel[1]) untersucht. Schon vor ihm waren von G. Kobb[2]) für den Fall, dafs $U = gz$, der Punkt also der Schwere unterworfen ist, fünf Flächen angegeben, für welche die Integrale (A) elliptisch werden, ein Ergebnis, das später durch zwei von P. Stäckel und E. Salkowski[3]) aufgefundene Flächen ergänzt wurde. Salkowski wies

[1]) P. Stäckel, Über die Reduktion eines Problems der Dynamik auf hyperelliptische Integrale. Math. Annalen, Bd. 41.

[2]) G. Kobb, Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. Acta mathematica, Bd. 10.

[3]) E. Salkowski, Zur Bewegung eines Punktes auf Rotationsflächen. Diss. Jena 1904.

zugleich nach, dafs es weitere Flächen von der verlangten Eigenschaft nicht gibt.

In der folgenden Arbeit soll die Zurückführbarkeit der Integrale (A) auf elliptische untersucht werden bei der Annahme, dafs der auf der Rotationsfläche befindliche Punkt von der Masse eins von einem auf der Rotationsachse liegenden Zentrum angezogen wird, U also eine Funktion von ϱ, $= f(\varrho)$ wird, wenn ϱ den Abstand des angezogenen Punktes vom anziehenden Zentrum bedeutet.

Grundlegend für die Untersuchung ist der folgende, von P. Stäckel[1]) abgeleitete Satz:

Damit das Integral

$$(B) \qquad t = \int \frac{r\sqrt{\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du}{\sqrt{2r^2[U+h] - c^2}}$$

elliptisch werde, ist erforderlich, dafs $r^2 = R_1(u)$, $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R_2(u)$, also $z = \int \sqrt{R_2(u)}\, du$ werde, wo $R_1(u)$ und $R_2(u)$ rationale Funktionen von u bezeichnen und dafs diese Ausdrücke in U eingesetzt, U zu einer rationalen Funktion machen. Aufser den Bedingungen, $r^2 = R_1(u)$, $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R_2(u)$, mufs noch, damit das Integral (B) elliptisch werde, die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$(C) \qquad \frac{r\sqrt{\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}}{\sqrt{2r^2[U+h] - c^2}} = R\left(u, \sqrt{F_4(u)}\right),$$

wo $F_4(u)$ eine Funktion von u von nicht höherem als dem vierten Grade bezeichnet. Jede Funktion $R\left(u, \sqrt{F_4(u)}\right)$ läfst sich auf die Form bringen:

$$\frac{G_1 + G_2\sqrt{F_4(u)}}{G_3 + G_4\sqrt{F_4(u)}} = \frac{F_1 + F_2\sqrt{F_4(u)}}{F_3}.$$

In diesem Falle ist $F_1 = 0$, da die linke Seite von (C), im Falle die Gleichung quadriert wird, im Zähler und Nenner nur rationale Funktionen $R(u)$ von u enthält. Also wird:

---

[1]) P. Stäckel, Über die Reduktion ... Math. Annalen, Bd. 41.

$$\text{(D)} \qquad \frac{r\sqrt{\left(\frac{dr}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}{\sqrt{2r^2[U+h]-c^2}} = \frac{F_2\sqrt{F_4}}{F_3}.$$

In dem vorliegendem Falle ist U eine Funktion von ϱ. Da $\varrho^2 = r^2 + z^2$ ist und r^2 als rationale Funktion von u vorausgesetzt wird, so läfst U sich nur dann rational durch u ausdrücken, wenn z^2 ebenfalls eine rationale Funktion von u ist.

Die Fälle, welche den in dem Stäckelschen Satze angegebenen Bedingungen genügen, sind jedoch nicht die einzigen, für welche die Integrale (A) elliptisch werden. Besonders zu behandeln sind diejenigen, in denen nicht z^2, sondern $(z-z_0)^2$ als rationale Funktion von u angenommen wird, bei denen also ϱ^2 und daher auch U noch eine Wurzel einer rationalen Funktion enthält.

Die Untersuchung soll zunächst für die erste Annahme durchgeführt werden. $f(\varrho)$ werde als ganze Funktion von $\varrho^2 = A\varrho^{2n'}$ vorausgesetzt. Setzt man $r^2 = \frac{G_1(u)}{G_2(u)}$, $z^2 = \frac{G_3(u)}{G_4(u)}$, wo G_1, G_2, G_3 und G_4 ganze Funktionen von u sind, so erhält man für U eine rationale Funktion von u. Bezüglich der Funktionen $G_1 \ldots G_4$ soll vorausgesetzt werden, dafs G_1 und G_2, G_3 und G_4, ferner G_1 und G_4 keinen gemeinsamen Teiler haben. Die Gleichung (D) erhält durch Einsetzen der für r^2 und z^2 angenommenen Werte folgende Form:

$$\text{(E)} \qquad \sqrt{\frac{G_1}{G_2}\cdot\frac{\left\{\frac{d}{du}\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}\right\}^2+\left\{\frac{d}{du}\sqrt{\frac{G_3}{G_4}}\right\}^2}{2\cdot\frac{G_1}{G_2}\left[A\left(\frac{G_1}{G_2}+\frac{G_3}{G_4}\right)^{n'}+h\right]-c^2}} = \frac{F_2\sqrt{F_4}}{F_3}.$$

Berechnet man $\frac{d}{du}\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}$ und $\frac{d}{du}\sqrt{\frac{G_3}{G_4}}$, entwickelt $\left(\frac{G_1}{G_2}+\frac{G_3}{G_4}\right)^{n'}$ und setzt die so erhaltenen Ausdrücke in (E) ein, so ergibt sich:

$$\text{(F)} \qquad \sqrt{\frac{\begin{array}{c}G_2^{n'-3}G_4^{n'-3}\{G_3G_4^3[G_2G'_1-G_1G'_2]^2\\+G_1G_2^3[G_4G'_3-G_3G'_4]^2\}\end{array}}{\begin{array}{c}G_3\{AG_1G_1^{n'}G_4^{n'}+AG_1G_1^{n'-1}G_2G_3+\ldots AG_1G_2^{n'}G_3^{n'}\\+hG_1G_2^{n'}G_4^{n'}-c^2G_2^{n'+1}G_4^{n'}\}\end{array}}} = \frac{F_2\sqrt{F_4}}{F_3}.$$

Bezeichnet man $AG_1G_1^{n'}G_4^{n'}+\ldots-c^2G_2^{n'+1}G_4^{n'}$ mit $\Gamma(u)$ und schafft aus dem Nenner von (F) die Wurzel fort, indem man Zähler und Nenner mit $\sqrt{G_3\Gamma(u)}$, oder im Falle $n'<3$ ist, mit

$\sqrt{G_3 G_2^{3-n'} G_4^{3-n'} \Gamma(u)}$ multipliziert, so mufs $F_3 = G_3 \Gamma(u)$ sein. Wird dann noch (F) quadriert, so ergibt sich:

$$G_3 G_2^{n'-3} G_4^{n'-3} \{G_3 G_4^3 [G_2 G'_1 - G_1 G'_2]^2 + G_1 G_2^3 [G_4 G'_3 - G_3 G'_4]^2\} \cdot \Gamma(u) = F_2^2 F_4.$$

Da $\Gamma(u)$ keinen von h und c^2 unabhängigen Teiler hat und auch nicht teilbar ist durch das Quadrat einer ganzen Funktion, so mufs $\Gamma(u)$ als Faktor in F_4 enthalten sein. Es ist also: $F_4 = \Gamma(u)\, \Gamma'(u)$, wo $\Gamma'(u)$ eine ganze rationale Funktion von u bezeichnet. Dann darf der Grad von $\Gamma(u)$ 4 nicht überschreiten. λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4 mögen den Grad von $G_1 \ldots G_4$, γ und γ' den Grad von $\Gamma(u)$ und $\Gamma'(u)$ bezeichnen. Soll $\gamma \leq 4$ sein, so müssen $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ folgende Gleichungen erfüllen:

$$(G) \quad \begin{cases} \lambda_1 + n' \lambda_1 + n' \lambda_4 \leq 4, \\ \lambda_1 + (n'-1)\lambda_1 + (n'-1)\lambda_4 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 4, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_4 + (n'-1)\lambda_2 + (n'-1)\lambda_3 \leq 4, \\ \lambda_1 + n' \lambda_2 + n' \lambda_3 \leq 4, \\ (n'+1)\lambda_2 + n' \lambda_4 \leq 4. \end{cases}$$

Die Gröfsen $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ können nicht alle gleich 0 sein, daher folgt aus den vorhergehenden Gleichungen, dafs der höchste Wert, den n' annehmen kann, gleich 4 ist. Mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen würde sich das Integral

$$t = \int \frac{r \sqrt{dr^2 + dz^2}}{\sqrt{2r^2 [U + h] - c^2}}$$

in Bezug auf seine Zurückführbarkeit auf ein elliptisches untersuchen lassen für $U = -\mu \varrho^8$, $U = -\mu \varrho^6$, $U = -\mu \varrho^4$ und $U = -\frac{\mu}{2} \varrho^2$. Von den angegebenen Fällen soll die Untersuchung im ersten Teil durchgeführt werden für $U = -\frac{\mu}{2} \varrho^2$.

Ferner sollen im zweiten und dritten Teil ähnliche Untersuchungen angestellt werden, wenn $U = \frac{\mu}{2\varrho^2}$ und $U = \frac{\mu}{\varrho}$ ist.

I.

Bestimmung der Rotationsflächen, für welche die Bewegung auf elliptische Integrale führt für die Kräftefunktion $U = -\frac{\mu}{2}\varrho^2$.

Es sei $U = -\frac{\mu}{2}\varrho^2$, also $n' = 1$. Es sollen zunächst die Fälle untersucht werden, die sich mit Hilfe des Satzes von Stäckel behandeln lassen. Aus den Gleichungen (G) ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen für $\lambda_1 \ldots \lambda_4$:

$$(G_1) \qquad \begin{cases} (1) & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \leq 4, \\ (2) & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqq 4, \\ (3) & 2\lambda_1 + \lambda_4 \leqq 4, \\ (4) & 2\lambda_2 + \lambda_4 \leqq 4. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen ist ersichtlich, dafs $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ alle Werte annehmen können zwischen 0 und 4. Dadurch würden sich 625 Kombinationen der Werte $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ ergeben; es ist zu untersuchen, für welche derselben die Gleichungen G_1 erfüllt sind und ferner:

$$G_3 G_2^{3-n'} G_4^{3-n'} \{G_3 G_4^3 [G_2 G'_1 - G_1 G'_2]^2 + G_1 G_2^3 [G_4 G'_3 - G_3 G'_4]^2\} = F^2$$

wird. Da $n' = 1$ ist, so sind $G_2^{3-n'}$ und $G_4^{3-n'}$ Quadrate, und es bleibt daher nur zu untersuchen, für welche unter den möglichen Fällen:

$$(H) \qquad G_3 \{G_3 G_4^3 [G_2 G'_1 - G_1 G'_2]^2 + G_1 G_2^3 [G_4 G'_3 - G_3 G'_4]^2\} = F_2$$

wird. Die für $G_1 \ldots G_4$ angenommenen Werte werden in die Gleichung (H) eingesetzt und diese dann direkt untersucht. In einigen Fällen kann die Entscheidung darüber, ob die linke Seite von (H) gleich einem vollständigen Quadrat sein kann, mit Hilfe eines der folgenden Sätze getroffen werden.

(1)[1] Ist $\gamma = 4$ und ist die Gleichung (H) von ungeradem Grade, so ist die Annahme ausgeschlossen.

(2) Ist $\gamma = 4$, so sind alle Annahmen über $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ möglich, wenn für dieselben entweder $G_2 G'_1 - G_1 G'_2$ oder $G_4 G'_3 - G_3 G'_4 = 0$ wird, und der Faktor des noch übrigen Gliedes des Klammerausdrucks von (H), also entweder $G_3^2 G_4^3$ oder $G_3 G_1 G_2^3$ gleich dem Quadrat einer ganzen Funktion wird. Ist $\gamma < 4$, so mufs sich $G_3^2 G_4^3$ oder $G_1 G_3 G_2^3$ in ein Produkt aus einer Funktion vom Grade γ' mal einem vollständigen Quadrat zerlegen lassen.

(3)[1] In einigen Fällen ergibt die Gleichung (H) die Bedingung, dafs der Ausdruck $\Phi = G^2 + HJ$ das Quadrat einer rationalen Funktion wird. Ist H eine positive Form von u, d. h. eine solche, die für reelle Werte des Arguments nur positive Werte annimmt und nie verschwindet, sind ferner die ganzen Funktionen G und J teilerfremd, so bleibt Φ immer positiv. Soll dann $\Phi = G^2$ werden, so darf G für keinen reellen Wert von u verschwinden. Dazu ist notwendig, dafs G von gerader Ordnung, der Grad von Φ also durch 4 teilbar ist.

In der nun folgenden Untersuchung sollen $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ der Reihe nach alle Werte von 0 bis 4 durchlaufen, anfangend von $\lambda_4 = 0$. Da $G_1 \ldots G_4$ ganze Funktionen sind, so kann man den Ansatz machen:

$$G_1 = a_1 + b_1 u + \ldots c_1 u^{\lambda_1}, \quad G_2 = a_2 + b_2 u + \ldots c_2 u^{\lambda_2},$$
$$G_3 = a_3 + b_3 u + \ldots c_3 u^{\lambda_3}, \quad G_4 = a_4 + b_4 u + \ldots c_4 u^{\lambda_4},$$

wobei alle Konstanten in den Ausdrücken $G_1 \ldots G_4$ aufser einer einzigen je nach den Werten von $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ gleichzeitig gleich 0 sein können. Nach den für λ_1 möglichen Werten $0 \ldots 4$ ergeben sich fünf Hauptgruppen (A) ... (E). Innerhalb derselben werden wieder die Fälle zu einer Gruppe zusammengefafst, für welche λ_2 einen der Werte $0 \ldots 4$ hat. Da die Art der Untersuchung sich in vielen Fällen wiederholt, soll dieselbe nur für einzelne derselben durchgeführt werden.

(A) $\lambda_1 = 0$, I) $\lambda_2 = 0$.

Alle hierher gehörigen Fälle ergeben, da $r^2 = \frac{G_1}{G_2} = \frac{a_1}{a_2} = a^2$ ist, einen Kreiszylinder.

---

[1] E. Salkowski, Zur Bewegung eines Punktes auf Rotationsflächen. Diss. Jena 1904.

(1) $\lambda_3 = 0$,

a) $\lambda_4 = 1$, $G_1 = a_1$, $G_2 = a_2$, $G_3 = a_3$, $G_4 = a_4 + b_4 u$.

Setzt man diese Werte in Gleichung (H) ein, so ergibt sich:

$$a_3 \{a_1 a_2^3 [-a_3 b_4]^2\} = F^2.$$

Werden die Konstanten so bestimmt, dafs die linke Seite dieser Gleichung positiv wird, so ist die Gleichung immer möglich, und man erhält:

$$r^2 = \frac{a_1}{a_2} = a^2, \quad z^2 = \frac{a_3}{a_4 + b_4 u}.$$

Setzt man $a_4 = 0$, $\frac{a_3}{b_4} = 1$, $\frac{1}{u} = v$, wodurch das Integral unverändert bleibt, so ergibt sich:

$$r^2 = a^2, \quad z^2 = v, \text{ d. h. der Kreiszylinder.}$$

Die Lage des Anziehungszentrums ist dabei beliebig, da das Integral, in diesem Falle ein elementares, elementar bleibt, wenn $z = m + \sqrt{v}$ gesetzt wird.

b) $\lambda_4 = 2$, $a_3 \{a_1 a_2^3 [-a_3 (b_4 + 2 c_4 u)]^2\} = F^2$. Satz 2.

$$r^2 = a^2, \quad z^2 = \frac{a_3}{a_4 + b_4 u + c_4 u^2} = v^2,$$

wenn $a_4 = b_4 = 0$, $\frac{a_3}{c_4} = 1$ gesetzt wird. Kreiszylinder.

c) $\lambda_4 = 3$. Kreiszylinder.

(2) $\lambda_3 = 1$,

a) $\lambda_4 = 0$, $(a_3 + b_3 u) \{a_1 a_2^3 [a_4 b_3]^2\} = F^2$. Satz 2.

$$r^2 = a^2, \quad z^2 = \frac{a_3 + b_3 u}{a_4} \quad \text{Kreiszylinder.}$$

b) $\lambda_4 = 1$, c) $\lambda_4 = 2$, d) $\lambda_4 = 3$ ergeben Kreiszylinder. Satz 2.

e) $\lambda_4 = 4$, $(a_3 + b_3 u) \{a_1 a_2^3 [G_4 G'_3 - G_3 G'_4]^2\} = F^2$.

$\gamma = 4$, also ist die Annahme nach Satz 1 ausgeschlossen.

(3) $\lambda_3 = 2$,

a) $\lambda_4 = 0$, $r^2 = a^2$, $z^2 = \frac{a_3 + b_3 u + c_3 u^2}{a_4} = u^2$,

wenn $a_3 = b_3 = 0$, $\frac{c_3}{a_4} = 1$ ist. Kreiszylinder.

Die folgenden Fälle:

b) $\lambda_4 = 1$, c) $\lambda_4 = 2$, d) $\lambda_4 = 3$ ergeben Kreiszylinder.

e) $\lambda_4 = 4$, $G_4 = u^4$.

$$(a_3 + b_3 u + c_3 u^2)\{a_1 a_2{}^3 [G_4 G'_3 - G_3 G'_4]^2\} = F^2.$$

Die Annahme ist möglich, wenn $G_3 = g_3{}^2 = (\alpha + \beta u)^2$ ist. Alsdann ergibt sich:

$$r^2 = a^2, \quad z^2 = \frac{(\alpha + \beta u)^2}{u^4} \quad \text{Kreiszylinder.}$$

(4) $\lambda_3 = 3$,

a) $\lambda_4 = 0$, $G_3 = u^3$.

$$u^3\{a_1 a_2{}^3 [G_4 G'_3]^2\} = F^2. \quad \text{Satz 2, da } \gamma = 3.$$

$$r^2 = a^2, \quad z^2 = \frac{u^3}{a_4}. \quad \text{Kreiszylinder.}$$

b) $\lambda_4 = 1$. Kreiszylinder.

c) $\lambda_4 = 2$. „

d) $\lambda_4 = 3$. „

(5) $\lambda_3 = 4$, $G_3 = u^4$.

a) $\lambda_4 = 0$, $u^4\{a_1 a_2{}^3 [G_4 G'_3]^2\} = F^2$. Satz 2.

$$r^2 = a^2, \quad z^2 = \frac{u^4}{a_4}. \quad \text{Kreiszylinder.}$$

Unter der Voraussetzung, dafs $G_3 = g_3{}^2$ ist, führen auch die folgenden Annahmen zu einem Resultat:

b) $\lambda_4 = 1$, $r^2 = a^2$, $z^2 = \dfrac{(\alpha + \beta u + \gamma u^2)^2}{u}$. Kreiszylinder.

c) $\lambda_4 = 2$, $r^2 = a^2$, $z^2 = \dfrac{(\alpha + \beta u + \gamma u^2)^2}{u^2}$. „

d) $\lambda_4 = 3$, $r^2 = a^2$, $z^2 = \dfrac{(\alpha + \beta u + \gamma u^2)^2}{u^3}$. „

II) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\lambda_3 = 0$,

a) $\lambda_4 = 0$, $a_3\{a_3 a_4{}^3 [-a_1 b_2]^2\} = F^2$. Satz 2.

$$r^2 = \frac{a_1}{u} = v, \quad z^2 = \frac{a_3}{a_4} = b^2. \quad \text{Ebene.}$$

Es ergeben sich elementare Integrale, sowohl, wenn das Anziehungszentrum in der Ebene, als auch, wenn es aufserhalb derselben liegt.

b) $\lambda_4 = 1, \quad a_3\{a_3(a_1+b_4u)^3[-a_1b_2]^2 + a_1(a_2+b_2u)^3[-a_3b_4]^2\} = F^2.$

Da $\gamma = 3$ ist, so ist die Annahme möglich, wenn $G_2 = G_4$ ist. G_2 wird in dem Falle Bestandteil von $\Gamma'(u)$. Daher ergibt sich:

$$r^2 = \frac{a_1}{a_2+b_2u}, \quad z^2 = \frac{a_3}{a_2+b_2u}.$$

$$\frac{r^2}{a_1} = \frac{z^2}{a_3}, \; r^2 - mz^2 = 0, \text{ also der Rotationskegel.}$$

$$\frac{a_1}{a_3} = m.$$

Das Anziehungszentrum liegt in der Spitze des Kegels. Die Integrale werden in diesem Falle elementar. Auch bei anderer Lage des Anziehungszentrums, wenn die auf das Anziehungszentrum als Anfangspunkt bezogene Kegelgleichung $r^2 - m(z-z_0)^2 = 0$ ist, wird der gestellten Forderung genügt und die Integrale (A) werden elliptisch.

c) $\lambda_4 = 2, \; G_4 = u^2, \; G_2 = a_2 + b_2u.$

$$a_3\{a_3u^6[-a_1b_2]^2 + a_1(a_2+b_2u)^3[-2a_3u]^2\} = F^2.$$

Ist $G_2 = u$, so ergibt sich:

$$a_3\{a_3u^6[-a_1]^2 + a_1u^3[-2a_3u]^2\} = F^2.$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung kein vollständiges Quadrat ist, so ist die Annahme ausgeschlossen.

(2) $\lambda_3 = 1,$

a) $\lambda_4 = 0, \quad (a_3+b_3u)\{(a_3+b_3u)a_4^3[-a_1b_2]^2 + a_1(a_2+b_2u)^3[-a_4b_3]^4\} = F^2.$

Setzt man $G_2 = G_3$, so wird die Bedingungsgleichung:

$$(a_3+b_3u)^2a_4^2a_1\{a_1a_4b_2^2 + (a_2+b_2u)^2b_3^2\} = F^2.$$

Da $\gamma = 2$ ist, so kann $a_1a_4b_2^2 + (a_2+b_2u)^2b_3^2$ als Bestandteil in $\Gamma'(u)$ enthalten sein.

$$r^2 = \frac{a_1}{a_2+b_2u}, \quad z^2 = \frac{a_2+b_2u}{a_4}, \quad r^2z^2 = \frac{a_1}{a_4} = a^2,$$

$$rz = a.$$

Die Gleichung $xz = a$ stellt eine gleichseitige Hyperbel dar mit der X-Achse und der Z-Achse als Asymptoten. Die Rotationsfläche $rz = a$ entsteht also durch Rotation der Hyperbel $xz = a$

um eine ihrer Asymptoten, die Z-Achse. Die Integrale (A) werden nur dann elliptisch, wenn das Anziehungszentrum im Mittelpunkt der Fläche liegt.

b) $\lambda_4 = 1, \quad G_3\{G_3 G_4^3 [G_2 G'_1 - G_1 G'_2]^2 + G_1 G_2^3 [G_4 G'_3 - G_3 G'_4]^2\} = F^2.$

Setzt man in dieser Gleichung

$$G_1 = 1, \; G_2 = a_2 + u, \; G_3 = a_3 + b_3 u, \; G_4 = u,$$

so wird die Bedingungsgleichung:

$$(a_3 + b_3 u)\{(a_3 + b_3 u) u^3 + (a_2 + u)^3 [u b_3 - (a_3 - b_3 u)]^2\} = F^2.$$

Da $\gamma = 3$ ist, kann $a_3 + b_3 u$ Bestandteil von $\Gamma'(u)$ werden, dann mufs sein:

$$a_3 u^3 + b_3 u^4 + a_3^2 (a_2^3 + 3 a_2^2 u + 3 a_2 u^2 + u^3) = F^2 = (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)^2.$$

Setzt man die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von u der linken und der rechten Seite einander gleich, so ergeben sich die folgenden Koeffizientenrelationen:

(1) $\alpha^2 = b_3,$
(2) $2\alpha\beta = a_3 + a_3^2,$
(3) $2\alpha\gamma + \beta^2 = 3 a_2 a_3^2,$
(4) $2\beta\gamma = 3 a_2^2 a_3^2,$
(5) $\gamma^2 = a_3^2 a_2^3.$

Aus (1) folgt: $\alpha = \pm \sqrt{b_3}$ (es gelte das $+$-Zeichen),

„ (2) „ $\beta = \dfrac{a_3 (1 + a_3)}{2\sqrt{b_3}},$

„ (4) „ $\gamma = \dfrac{3 a_2^2 a_3 \sqrt{b_3}}{1 + a_3}.$

Durch die für α, β und γ gefundenen Werte müssen auch die Gleichungen (3) und (5) befriedigt werden. Es bestehen dann noch zwischen a_2, a_3, b_3 folgende Gleichungen:

(3a) $2\sqrt{b_3}\,\dfrac{3 a_2^2 a_3 \sqrt{b_3}}{1 + a_3} + \dfrac{a_3^2 (1 + a_3)^2}{4 b_3} = 3 a_2 a_3^2,$

(5a) $\dfrac{9 a_2^4 a_3^2 b_3}{(1 + a_3)^2} = a_2^3 a_3^2.$

Aus der letzteren Gleichung ergibt sich:

$$b_3 = \frac{(1 + a_3)^2}{9 a_2}.$$

Mit diesem Werte folgt aus (3a):

$$\frac{6\,a_2^2\,a_3}{1+a_3}\cdot\frac{(1+a_3)^2}{9\,a_2}+\frac{a_3^2\,(1+a_3)^2\,9\,a_2}{4\,(1+a_3)^2}=3\,a_2\,a_3^2,$$

$$\frac{2\,(1+a_3)}{9}+\frac{3\,a_3}{4}=a_3,$$

$$8\,(1+a_3)+27\,a_3=36\,a_3,\quad a_3=8.$$

Also wird:

$$b_3=\frac{9}{a_2}.$$

a_2 kann beliebigen Wert haben. Dann wird:

$$r^2=\frac{G_1}{G_2}=\frac{1}{a_2+u},$$

$$z^2=\frac{G_3}{G_4}=\frac{8+\dfrac{9}{a_2}\,u}{u}.$$

Wenn man einführt:

$$\frac{1}{a_2}=a^2,$$

so wird:

$$r^2=\frac{a^2}{1+a^2u},\quad z^2=\frac{8+9\,a^2u}{u}.$$

Eliminiert man u aus den für r^2 und z^2 gefundenen Ausdrücken, so ergibt sich:

$$z^2=\frac{(9\,a^2-r^2)\,a^2}{a^2-r^2},$$

$$\boldsymbol{a^2z^2-r^2z^2+a^2r^2=9\,a^4.}$$

Verlegt man das Anziehungszentrum, indem man einführt: $z'=m+z$, so werden die Integrale (A) nicht elliptisch, also entspricht die Lösung der gestellten Forderung nur bei einer Lage des anziehenden Zentrums.

c) $\lambda_4=2,\quad \gamma=4,$

$$(a_3+b_3u)\{(a_3+b_3u)\,(a_4+b_4u+c_4u^2)^3\,[-a_1b_2]^2$$
$$+a_1\,(a_2+b_2u)^3\,[(a_4+b_4u+c_4u^2)\,b_3-(a_3+b_3u)\,(b_4+2\,c_4u)]^2\}=F^2.$$

Aus dem Klammerausdruck mufs sich G_3 absondern lassen. Das ist nur möglich, wenn $G_3=G_2$ ist. Setzt man $G_4=u^2$, so wird die Bedingungsgleichung:

$$u^6\,a_1^2\,b_2^2+a_1\,(a_2+b_2u)^2\,[u^2\,b_3-(a_3+b_3u)\,2u]^2=F^2.\quad \text{Satz 3.}$$

(3) $\lambda_3 = 2$,

a) $\lambda_4 = 0$. Kein Resultat.

b) $\lambda_4 = 1$, $G_3 = u^2$.

$u^2\{u^2(a_4 + b_4 u)^3[-a_1 b_2]^2 + a_1(a_2 + b_2 u)^3[(a_4 - b_1 u)2u - u^2 b_1]^2\} = F^2$.

Für $G_2 = G_4 = a_2 + b_2 u$ ist die Aufgabe möglich. Also wird:

$$r^2 = \frac{a_1}{a_2 + b_2 u}, \quad z^2 = \frac{u^2}{a_2 + b_2 u}.$$

Setzt man $a_2 = 1$, $b_2 = \frac{1}{a}$, $a_1 = a^2$, so ergibt sich:

$$r^2 z^2 = (a^2 - r^2)^2.$$

Die Lösung entspricht der gestellten Forderung nur bei einer Lage des anziehenden Zentrums.

c) $\lambda_4 = 2$. $G_2 = u$, $G_4 = u^2$, $G_3 = a_3 + b_3 u + c_3 u^2$ ergibt kein Resultat.

(4) $\lambda_3 = 3$,

a) $\lambda_4 = 0$. Satz 1.

b) $\lambda_4 = 1$. Ergibt kein Resultat.

c) $\lambda_4 = 2$. Kein Resultat, da sich ein Widerspruch in den Koeffizientenrelationen ergibt.

III) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\lambda_3 = 0$,

a) $\lambda_4 = 0$, $G_2 = u^2$, $a_3\{a_3 a_1^3[-a_1 2u]^2\} = F^2$,

$$r^2 = \frac{a_1}{u^2} = a_1 v^2, \quad z^2 = b^2 \text{ Ebene.}$$

(2) $\lambda_3 = 1$, a) $\lambda_4 = 0$. Satz 1.

(3) $\lambda_3 = 2$, a) $\lambda_4 = 0$. Der Fall läfst sich auf Satz 3 zurückführen.

(B) $\lambda_1 = 1$, I) $\lambda_2 = 0$.

(1) $\lambda_3 = 0$,

a) $\lambda_4 = 0$. Ebene.

b) $\lambda_4 = 1$, $a_3\{a_3(a_4 + b_4 u)^3[a_2 b_1]^2 + (a_1 + b_1 u)a_2^3[-a_3 b_4]^2\} = F^2$.
$a_2^2 a_3^2\{(a_4 + b_4 u)^3 b_1^2 + (a_1 + b_1 u)a_2 a_3 b_4^2\} = F^2$.

Da der Klammerausdruck vom 3. Grade ist, müfste sich ein linearer Faktor absondern lassen, damit die übrigen Glieder ein vollständiges

Quadrat ergeben. Setzt man $b_1 = b_4 = 1$ und verfügt über die von u freien Glieder so, dafs sie verschwinden, so läfst sich von den übrigen u absondern und die Konstanten lassen sich so bestimmen, dafs diese Glieder ein vollständiges Quadrat, also $= (\alpha + u)^2$ sind. Es bestehen demnach folgende Gleichungen zwischen den Koeffizienten:

$$(1)\quad a_4^3 + a_1 a_2 a_3 = 0,$$
$$(2)\quad 3a_4^2 + a_2 a_3 = \alpha^2,$$
$$(3)\quad 3a_4 = 2\alpha.$$

Aus (3) folgt: $$\alpha = \frac{3a_4}{2}.$$

Also bleiben die Gleichungen:

$$(a)\quad a_4^3 + a_1 a_2 a_3 = 0,$$
$$(b)\quad 3a_4^2 + a_2 a_3 = \frac{9a_4^2}{4}.$$

Aus (a) folgt:

$$a_4 = \sqrt[3]{-a_1 a_2 a_3},$$

aus (b):

$$a_4 = 2\sqrt{\frac{-a_2 a_3}{3}},$$

also:

$$2\sqrt{\frac{-a_1 a_3}{3}} = \sqrt[3]{-a_1 a_2 a_3}.$$

Setzt man $a_3 = 1$, so wird:

$$4\left(-\frac{a_2}{3}\right) = \sqrt[3]{a_1^2 a_2^2}, \quad -\frac{64}{27}a_2 = a_1^2, \quad a_2 = -\frac{27}{64}a_1^2$$

und $$a_4 = 2\sqrt{\frac{9a_1^2}{64}} = \frac{3}{4}a_1,$$

also $$r^2 = \frac{a_1 + u}{-\frac{27}{64}a_1^2}, \quad z^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}a_1 + u}.$$

Eliminiert man u, so würde sich ergeben:

$$z^2 = \frac{1}{-\frac{1}{4}a_1 - \frac{27}{64}a_1^2 r^2},$$

also kein reeller Wert für z, wenn $a_1 > 0$. Setzt man dagegen $a_1 = -a$, so folgt:

$$r^2 = \frac{-a+u}{-\frac{27}{64}a^2}, \quad z^2 = \frac{1}{u-\frac{3}{4}a}.$$

Setzt man $a = \frac{8}{m^2}$, so ergibt sich:

$$r^2 = \frac{(m^2 u - 8)\, m^2}{-27}, \quad z^2 = \frac{m^2}{m^2 u - 6},$$

also: $$z^2 (2m^2 - 27 r^2) = m^4.$$

c) $\lambda_4 = 2, \quad G_4 = u^2.$

$$a_3 a_2{}^2 \{a_3 u^6 b_1{}^2 + (a_1 + b_1 u)\, a_2 [-2 a_3 u]^2\} = F^2,$$

ergibt kein Resultat.

(2) $\lambda_3 = 1,$

a) $\lambda_4 = 0.$

$$(a_3 + b_3 u)\{(a_3 + b_3 u)\, a_1{}^3 a_2{}^2 b_1{}^2 + (a_1 + b_1 u)\, a_2{}^3 a_4{}^2 b_3{}^2\} = F^2.$$

Da $\gamma = 2$ ist, kann der ganze Ausdruck Bestandteil von $F'(u)$ werden.

$\alpha)$ $b_1 = b_3 = 1$

$$r^2 = \frac{a_1 + u}{a_2}, \quad z^2 = \frac{a_3 + u}{a_4},$$

$$a_2 r^2 - a_4 z^2 = a_1 - a_3.$$

$\alpha\alpha)$ $a_1 - a_3 > 0, \quad \frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \frac{a_1 - a_3}{a_2} = a^2. \quad \frac{a_1 - a_3}{a_4} = b^2.$

Einschaliges Rotationshyperboloid.

$\beta\beta)$ $a_1 - a_3 < 0, \quad a_4 z^2 - a_2 r^2 = a_3 - a_1, \quad \frac{z^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1.$

Zweischaliges Rotationshyperboloid.

$\beta)$ $b_1 = 1, \quad b_3 = -1,$

$$r^2 = \frac{a_1 + u}{a_2}, \quad z^2 = \frac{a_3 - u}{a_4},$$

$$a_4 r^2 + a_4 z^2 = a_1 + a_3,$$

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{a_1 + a_3}{a_2}, \quad b^2 = \frac{a_1 + a_3}{a_4}.$$

$\frac{a_1 + a_3}{a_2} > \frac{a_1 + a_3}{a_4}$ verkürztes Rotationsellipsoid.

$\frac{a_1 + a_3}{a_2} < \frac{a_1 + a_4}{a_4}$ verlängertes „

b) $\lambda_4 = 1$, $(a_3 + b_3 u)\, a_2{}^2 \{(a_3 + b_3 u)\,(a_4 + b_4 u)^3\, b_1{}^2$
$+ (a_1 + b_1 u)\, a_2\, (a_4 b_3 - a_3 b_4)^2\} = F^2$.

Da $\gamma = 3$ ist, kann $a_3 + b_3 u$ Bestandteil von $\Gamma'(u)$ werden.

Ist $a_4 = 0$, $b_4 = 1$, so bleibt in der Klammer:

$$(a_3 + b_3 u)\, u^3\, b_1{}^2 + (a_1 + b_1 u)\, a_2\, a_3{}^2.$$

Soll dieser Ausdruck gleich einem vollständigen Quadrat, also $= (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)^2$ sein, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

(1) $\alpha^2 = b_1{}^2 b_3$,
(2) $2\alpha\beta = a_3 b_1{}^2$,
(3) $2\alpha\gamma + \beta^2 = 0$,
(4) $2\beta\gamma = a_2 b_1 a_3{}^2$,
(5) $\gamma^2 = a_1 a_2 a_3{}^2$.

Aus (1) folgt: $\alpha = b_1 \sqrt{b_3}$, aus (5): $\gamma = a_3 \sqrt{a_1 a_2}$, aus (4): $\beta = \dfrac{\sqrt{a_2}\, b_1\, a_3}{2\sqrt{a_1}}$.

Setzt man diese Werte in (2) und (3) ein, so ergibt sich:

(2 a) $2 b_1 \sqrt{b_3}\, \dfrac{b_1 \sqrt{a_2}\, a_3}{2\sqrt{a_1}} = a_3 b_1{}^2$,

(3 a) $2 b_1 \sqrt{b_3}\, a_3 \sqrt{a_1 a_2} + \dfrac{b_1{}^2 a_3{}^2 a_2}{4 a_1} = 0$.

Setzt man $b_1 = b_3 = 1$, $a_1 = a$, so folgt aus (2 a) $a_2 = a$ und aus (3 a) $a_3 = -8a$. Also ergibt sich:

$$r^2 = \frac{a+u}{a}, \quad z^2 = \frac{u - 8a}{u}.$$

Durch Elimination von u folgt:

$$z^2 = \frac{r^2 - 9}{r^2 - 1}.$$

c) $\lambda_4 = 2$. Satz 3. $G_1 = G_3 = u$, $G_4 = (\alpha + \beta u)^2$.

(3) $\lambda_3 = 2$,

a) $\lambda_4 = 0$, $G_2 = 1$.

$$G_3 \{G_3\, a_1{}^3\, b_1{}^2 + (a_1 + b_1 u)\, [a_1 G'_3]^2\} = F^2.$$

$G_3 = u^2$.

$$u^4 \{a_1{}^3\, b_1{}^2 + (a_1 + b_1 u)\, 4\, a_1{}^2\} = F^2.$$

Da $\gamma = 3$ ist, kann der Klammerausdruck Bestandteil von $\Gamma'(u)$ werden; die Annahme führt zu dem Resultat:

$r^2 = a_1 + b_1 u$, $z^2 = u^2$, $r^2 = a_1 + b_1 z = \mathbf{2p\,(z - z_0)}$ Paraboloid.

Die Lage des Anziehungszentrums ist beliebig.

b) $\lambda_4 = 1$, $(a_3 + b_3 u + c_3 u^2)\{a_3 + b_3 u + c_3 u^2)(a_4 + b_4 u)^3 a_2{}^2 b_1{}^2$
$+ (a_1 + b_1 u) a_2{}^3 [(a_4 + b_4 u)(b_3 + 2 c_3 u) - (a_3 + b_3 u + c_3 u^2) b_1]^2\} = F^2$.

Ist $G_1 = a_1 + b_1 u$, $G_2 = 1$, $G_3 = (\alpha + \beta u)^2$, $G_4 = u$, so muſs sein:

$$(\alpha + \beta u)^4 \{b_1{}^2 u^3 + (a_1 + b_1 u)[2\beta u - (\alpha + \beta u)]^2\} = F^2.$$

Die Koeffizienten von u^3 und u^2 lassen sich so bestimmen, daſs diese Glieder verschwinden. Dann müssen folgende Gleichungen bestehen:

(1) $b_1{}^2 + b_1 \beta^2 = 0$.
(2) $a_1 \beta^2 - 2\alpha\beta b_1 = 0$.

Aus (1) folgt: $\beta^2 = -b_1 = b$, also $\beta = \sqrt{b}$,

Aus (2) folgt: $\alpha = \dfrac{-a_1}{2\sqrt{b}}$.

Setzt man $b_1 = -1$, $a_1 = 2a^2$, so wird:

$$r^2 = 2a^2 - u, \quad z^2 = \frac{(u - a^2)^2}{u},$$
$$(2a^2 - r^2) z^2 = (a^2 - r^2)^2,$$
$$r^4 - 2a^2 r^2 + r^2 z^2 - 2a^2 z^2 + a^4 = 0.$$

Die Aufgabe führt nur bei einer Lage des anziehenden Zentrums auf elliptische Integrale.

c) $\lambda_4 = 2$, $G_3\{G_3 G_4{}^3 a_2{}^2 b_1{}^2 + (a_1 + b_1 u) a_2{}^3 [G_4 G'_3 - G_3 G'_4]^2\}$
$= F^2$.

$$G_3 = (\alpha + \beta u)^2, \quad G_4 = u^2.$$

$(\alpha + \beta u)^4\{u^6 a_2{}^2 b_1{}^2 + (a_1 + b_1 u) a_2{}^3 4\alpha^2 u^2\} = F^2$. Kein Resultat.

(4) $\lambda_3 = 3$,

a) $\lambda_4 = 0$. Läſst sich auf Satz 3 zurückführen.
b) $\lambda_4 = 1$. Kein Resultat.
c) $\lambda_4 = 2$. $\alpha)$ $G_3 = G_1 g_3{}^2$. Satz 3.
$\beta)$ $G_3 = G_1{}^3$. Führt auf einen Widerspruch.

II) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\lambda_3 = 0$,

a) $\lambda_4 = 0$, $r^2 = \dfrac{a_1 + b_1 u}{u}$, $z^2 = c$. Ebene.

b) $\lambda_4 = 1$, $r^2 = \dfrac{8 + b_1 u}{u}$, $z^2 = 9 + b_1 u$,

$$a^2 z^2 - r^2 z^2 + a^2 r^2 = 9a^4 \text{ (wie A II 2 b).}$$

c) $\lambda_4 = 2$. Kein Resultat.

(2) $\lambda_3 = 1$.

a) $\lambda_4 = 0$, $\boldsymbol{a^2 z^2 - r^2 z^2 + a^2 r^2 = 9 a^4}$ (wie A II 2 b).

b) $\lambda_4 = 1$, $(a_3 + b_3 u)\{(a_3 + b_3 u)(a_4 + b_4 u)^3 [a_2 b_1 - a_1 b_2]^2 + (a_1 + b_1 u)(a_2 + b_2 u)^3 [a_4 b_3 - a_3 b_4]^2\} = F^2$.

α) $G_3 = G_1$, $G_4 = m G_2$,

$$r^2 = \frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u}, \quad z^2 = \frac{a_1 + b_1 u}{m (a_2 + b_2 u)},$$

$$\boldsymbol{r^2 - m z^2 = 0} \quad \text{Kegel.}$$

β) $G_2 = G_4 = u$,

$$(a_3 + b_3 u) u^3 \{(a_3 + b_3 u) a_1^2 + (a_1 + b_1 u) a_3^2\} = F^2.$$

$$a_3 a_1^2 + a_1 a_3^2 = 0,$$

$$a_3 = -a_1, \quad r^2 = \frac{a_1 + b_1 u}{u}, \quad z^2 = \frac{b_3 u - a_1}{u},$$

$$\boldsymbol{r^2 + z^2 = b_1 + b_3 = a^2} \quad \text{Kugel.}$$

γ) $G_1 = a_1 + b_1 u$, $G_2 = 1 + u$,
$G_3 = 1 + b_3 u$, $G_4 = u$.

$1 + b_3 u$ wird Bestandteil von $\Gamma'(u)$, also bleibt:

$$(1 + b_3 u) u^3 (b_1 - a_1)^2 + (a_1 + b_1 u)(1 + u)^3 = F^2 = (\alpha + \beta u + \gamma u^2)^2.$$

(1) $a_1 = \alpha^2$,
(2) $b_1 + 3 a_1 = 2 \alpha \beta$,
(3) $3 a_1 + 3 b_1 = 2 \alpha \gamma + \beta^2$,
(4) $(b_1 - a_1)^2 + a_1 + 3 b_1 = 2 \beta \gamma$,
(5) $b_3 (b_1 - a_1)^2 + b_1 = \gamma^2$.

Aus (1) folgt: $\alpha = \sqrt{a_1}$,

„ (2) „ $\beta = \dfrac{b_1 + 3 a_1}{2\sqrt{a_1}}$,

„ (3) „ $\gamma = \dfrac{3 a_1^2 + 6 a_1 b_1 - b_1^2}{8 a_1 \sqrt{a_1}}$.

Es müssen noch folgende Gleichungen erfüllt sein:

(4) $(b_1 - a_1)^2 + a_1 + 3 b_1 = 2 \beta \gamma$,
(5) $b_3 (b_1 - a_1)^2 + b_1 = \gamma^2$,
(4 a) $8 a_1^2 (b_1 - a_1)^2 = (a_1 - b_1)^3$,
(5 a) $64 a_1^3 b_3 (b_1 - a_1)^2 = b_1^4 - 12 a_1 b_1^3 + 30 a_1^2 b_1^2 - 28 a_1^3 b_1 + 9 a_1^4$.

Beide Gleichungen lassen sich durch $(b_1 - a_1)^2$ dividieren, und es bleibt:

(4a) $8\,a_1^2 = a_1 - b_1, \quad b_1 = a_1 - 8\,a_1^2,$

(5a) $64\,a_1^3 b_3 = b_1^2 - 10\,a_1 b_1 + 9\,a_1^2, \quad b_3 = 1 + a_1,$

$$r^2 = \frac{a_1 + a_1(1 - 8\,a_1)\,u}{1 + u}, \quad z^2 = \frac{1 - (1 - a_1)\,u}{u},$$

$$a^2 z^2 - r^2 z^2 + a^2 r^2 = 9\,a^4 \text{ (A II 2a).}$$

c) $\lambda_4 = 2$. Satz 1.

(3) $\lambda_3 = 2,$

a) $\lambda_4 = 0$. Kein Resultat.

b) $\lambda_4 = 1, \quad (a_3 + b_3 u + c_3 u^2)\,\{G_3 G_1^3 [a_2 b_1 - a_1 b_2]^2 + G_1 G_2^3 [G_4 G_3' - G_3 G_4']^2\} = F^2.$

Es sei $G_2 = G_4 = u$, da $\gamma = 4$ ist, mufs G_3 gleich einem vollständigen Quadrat $= (\alpha + \beta u)^2$ sein. Alsdann wird die Bedingungsgleichung:

$$(\alpha + \beta u)^4 u^3 \{a_1^2 + (a_1 + b_1 u)[\beta u - \alpha]^2\} = F^2.$$

Damit sich aus dem Klammerausdruck u absondern läfst, müssen die konstanten Glieder in der Klammer verschwinden. Der Ausdruck in der Klammer ist:

$$a_1^2 + a_1 \alpha^2 + u\,[b_1 \alpha^2 - 2\,a_1 \alpha \beta + u\,(a_1 \beta^2 - 2\,\alpha b_1 \beta) + b_1 \beta^2 u^2].$$

Aus $a_1^2 + a_1 \alpha = 0$ folgt $\alpha = \pm \sqrt{-a_1} = \sqrt{a}$.

Die übrigen Glieder müssen sich auf die Form bringen lassen:

$$u\,(A - B\,u)^2.$$

A und B lassen sich aus folgenden Gleichungen bestimmen:

(1) $b_1 \alpha^2 - 2\,a_1 \alpha \beta = A^2,$

(2) $-a_1 \beta^2 + 2\,\alpha b_1 \beta = 2\,A\,B,$

(3) $b_1 \beta^2 = B^2,$

die für $\alpha = \sqrt{a}$ folgende Form annehmen:

(1) $a b_1 + 2\,a \sqrt{a}\,\beta = A^2,$

(2) $a \beta^2 + 2 \sqrt{a}\, b_1 \beta = 2\,A\,B,$

(3) $b_1 \beta^2 = B^2.$

Aus (1) folgt: $A = \sqrt{a b_1 + 2\,a \sqrt{a}\,\beta},$

„ (3) „ $B = \beta \sqrt{b_1}.$

Es mufs aufserdem die Gleichung bestehen:

$$2 \sqrt{a b_1 + 2\,a \sqrt{a}\,\beta}\; \beta \sqrt{b_1} = a \beta^2 + 2 \sqrt{a}\, b_1 \beta.$$

Aus der letzteren Gleichung folgt, wenn man $\beta = 1$ setzt, $b_1 = \frac{1}{4}\sqrt{a}$, und es wird:

$$r^2 = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{a}\,u - a}{u}, \quad z^2 = \frac{(\sqrt{a} + u)^2}{u}.$$

Durch Elimination von u ergibt sich die Flächengleichung:

$$z^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{a} - r^2\right) = \left(\frac{5}{4}\sqrt{a} - r^2\right)^2,$$

die durch Einführung von $a = 16\,m^4$ folgende Form annimmt:

$$\boldsymbol{z^2\,(m^2 - r^2) = (5\,m^2 - r^2)^2.}$$

c) $\lambda_1 = 2$. Satz 3. $G_3 = G_1\,G_2$.

III) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\lambda_3 = 0$, a) $\lambda_4 = 0$, $r^2 = \dfrac{a_1 + b_1\,u}{u^2}$, $\boldsymbol{z^2 = c}$ Ebene.

(C) $\lambda_1 = 2$, I) $\lambda_2 = 0$.

(1) $\lambda_3 = 0$, a) $\lambda_4 = 0$, $r^2 = u^2$, $\boldsymbol{z^2 = c^2}$ Ebene.

(2) $\lambda_3 = 1$, a) $\lambda_4 = 0$. Kein Resultat.

(3) $\lambda_3 = 2$, a) $\lambda_4 = 0$, $u^2\{u^2\,a_4{}^3\,[a_2\,(b_1 + 2\,c_1\,u)]^2 + (a_1 + b_1\,u + c_1\,u^2)\,a_2{}^3\,[a_4\,2\,u]^2\} = F^2$.

α) $G_1 = G_3$, $\boldsymbol{r^2 - mz^2 = 0}$ Kegel.

β) $G_1 = a^2 - u^2$, $G_3 = u^2$, $\boldsymbol{r^2 = a^2 - u^2}$, $\boldsymbol{z^2 = u^2}$ Kugel.

II) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\lambda_3 = 0$, a) $\lambda_4 = 0$, $r^2 = \dfrac{u^2}{a_2 + b_2 u}$, $\boldsymbol{z^2 = c}$ Ebene.

(2) $\lambda_3 = 1$, a) $\lambda_4 = 0$, $G_1 = u^2$, $G_3 = G_2$. Satz 3.

III) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\lambda_3 = 0$, a) $\lambda_4 = 0$, $r^2 = \dfrac{a_1 + b_1\,u + c_1 u^2}{u^2}$, $\boldsymbol{z^2 = c}$ Ebene.

Eine besondere Untersuchung erfordern die Fälle, für welche r^2 und z^2 gebrochene Funktionen, der Zähler oder der Nenner von ϱ^2 aber vom Grade 0, also entweder ϱ^2 oder $\frac{1}{\varrho^2}$ eine ganze Funktion ist.

Es möge $\varkappa$ den Grad von ϱ^2, $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ den Grad von $G_1 \ldots G_4$ bezeichnen. Es sei zunächst $\varkappa = 1$ und $\lambda_2 = \lambda_1 = 1$. Es ist

$$\varrho^2 = r^2 + z^2 = \frac{G_1}{G_2} + \frac{G_3}{G_4} = \frac{G_1\,G_4 + G_2\,G_3}{G_2\,G_4}.$$

Dieser Ausdruck soll gleich einer Funktion ersten Grades $= m + nu$ sein. Damit $G_1 G_4 + G_2 G_3$ durch G_2 teilbar ist, muſs sein $G_2 = G_4$.

Es sei $G_2 = G_4 = u$, also

$$\frac{G_1 G_4 + G_2 G_3}{u^2} = m + nu, \quad G_1 + G_3 = mu + nu^2.$$

Es sei $G_1 = a, \quad G_3 = nu^2 + mu - a,$

$$r^2 = \frac{a}{u}, \quad z^2 = \frac{nu^2 + mu - a}{u},$$

dann wird:

$$\frac{dr}{du} = \frac{-a}{2\sqrt{u^3}}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{nu^2 + a}{2\sqrt{u^3}\sqrt{nu^2 + mu - a}},$$

$$t = \int \frac{\sqrt{a}\left| \frac{a}{4u^3} + \frac{(nu^2 - a)^2}{4u^3(nu^2 + mu - a)} \right| du}{\sqrt{u}\sqrt{2\frac{a}{u}\left\{-\frac{\mu}{2}(m + nu) + h\right\} - c^2}}$$

$$t = \int \frac{\sqrt{a}\sqrt{a(nu^2 + mu - a) - n^2a^4 + 2anu^2 - a^2}\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}\sqrt{u}\sqrt{2a\left\{-\frac{\mu}{2}(m + nu) + h\right\} - c^2u}} du.$$

Unter dem Wurzelzeichen im Zähler fallen die konstanten Glieder fort und u läfst sich absondern. Dann bleibt unter dem Wurzelzeichen im Zähler eine Funktion dritten Grades, unter dem Wurzelzeichen im Nenner eine Funktion ersten Grades. Daher ist die Annahme möglich und es wird:

$$r^2 = \frac{a}{u}, \quad z^2 = \frac{nu^2 + mu - a}{u}.$$

Ist $m = a^2$, $n = a^3$, so ergibt sich durch Elimination von u die Fläche:

$$r^4 + r^2 z^2 - a^2 r^2 = a^4.$$

Kein Resultat ergeben die Fälle:

$$\varkappa = 1 \quad \varkappa = 1 \quad \varkappa = 1$$
$$\lambda_2 = \lambda_4 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 3, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 4,$$

$$\varkappa = 2$$
$$\lambda_2 = \lambda_4 = 1,$$

$$\varrho^2 = (m + nu)^2, \quad G_2 = G_4 = u, \quad G_1 + G_3 = (m + nu)^2 u.$$

Es würde im Zähler von r^2 oder z^2 eine Funktion dritten Grades auftreten und daher würde auch $\left(\frac{dr}{du}\right)^2$ oder $\left(\frac{dz}{du}\right)^2$ eine Funktion dritten Grades im Nenner enthalten. Da nun ϱ^2 schon vom zweiten Grade ist, so ist die Annahme ausgeschlossen. Auch die übrigen Annahmen:

$$\begin{array}{cccc} \varkappa = 2 & \varkappa = 2 & \varkappa = 2 & \\ \lambda_2 = \lambda_4 = 2' & \lambda_2 = \lambda_4 = 3' & \lambda_2 = \lambda_4 = 4' & \\ \varkappa = 3 & \varkappa = 3 & \varkappa = 3 & \varkappa = 3 \\ \lambda_2 = \lambda_4 = 1' & \lambda_2 = \lambda_4 = 2' & \lambda_2 = \lambda_4 = 3' & \lambda_2 = \lambda_4 = 4' \\ \varkappa = 4 & \varkappa = 4 & \varkappa = 4 & \varkappa = 4 \\ \lambda_2 = \lambda_4 = 1' & \lambda_2 = \lambda_4 = 2' & \lambda_2 = \lambda_4 = 3' & \lambda_2 = \lambda_4 = 4 \end{array}$$

führen zu keinem Resultat.

Es kann ferner $\frac{1}{\varrho^2}$ eine ganze Funktion von u sein. Es möge wieder $\varkappa$ den Grad von $\frac{1}{\varrho^2}$, $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ den Grad von $G_1 \ldots G_4$ bezeichnen. Es sei zunächst $\varkappa = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 1$. Setzt man $G_1 = u$, so wird, da $r^2 = \frac{G_1}{G_2}$, $z^2 = \frac{G_3}{G_4}$ ist, $\varrho^2 = \frac{G_1 u + G_3}{u} = \frac{a}{u}$. $G_1 u + G_3 = a$. Es sei $G_1 = m + n u$; alsdann wird: $G_3 = a - m u - n u^2$. Die Konstanten sollen so bestimmt werden, dafs G_3 ein vollständiges Quadrat wird. $G_3 = (\alpha - \beta u)^2$, also $m = 2\alpha\beta$, $n = -\beta^2$, daher $G_1 = 2\alpha\beta - \beta^2 u$.

$$r^2 = 2\alpha\beta - \beta^2 u, \quad z^2 = \frac{(\alpha - \beta u)^2}{u},$$

$$\frac{dr}{du} = \frac{-\beta^2}{2\sqrt{2\alpha\beta - \beta^2 u}}, \quad \frac{dz}{du} = -\frac{\beta u + \alpha}{2\sqrt{u^3}},$$

$$t = \int \frac{\sqrt{2\alpha\beta - \beta^2 u}\,\sqrt{3\alpha^2\beta^2 u + 2\alpha^3\beta}\,du}{2\sqrt{u^3}\,\sqrt{2\alpha\beta - \beta^2 u}\,\sqrt{2(2\alpha\beta - \beta^2 u)\left\{-\frac{\mu}{2}\frac{a}{u} + h\right\} - c^2}}.$$

Das Integral ist elliptisch, und es ist für $\beta = 1$, $\alpha = a^2$:

$$r^2 = 2a^2 - u, \quad z^2 = \frac{(a^2 - u)^2}{u},$$

$$(2a^2 - r^2)\,z^2 = (a^2 - r^2)^2.$$

Unter den übrigen noch möglichen Fällen ergibt ein Resultat die Annahme: $\varkappa = 1$, $\lambda_2 = \lambda_4 = 2$.

$$r^2 = \frac{au - m}{u^2}, \quad z^2 = \frac{a}{u^2}, \quad a = m = 4u^2.$$

$$r^2 + (z - n)^2 = n^2 \quad \text{Kugel.}$$

Um die Fälle zu bestimmen, in denen ϱ^2 keine rationale Funktion von u ist, sondern noch eine Wurzel einer rationalen Funktion enthält, kann man ansetzen:

$$(z-z^0)^2 = f(u) \quad \text{oder} \quad (r-r_0)^2 = \varphi(u).$$

Für $f(u)$ und $\varphi(u)$ können nur Funktionen vom ersten oder zweiten Grade angenommen werden, da sich nur in dem Falle $\Gamma(u)$ rational machen läfst.

Es sei $$(z-z_0)^2 = \frac{g_1(u)}{g_2(u)}, \quad r^2 = \frac{g_3(u)}{g_4(u)},$$

und es bezeichne $\varkappa, k, \lambda, \delta$ der Reihe nach den Grad von $G_1 \dots G_4$.

$$\varkappa = 0, \quad k = 1$$
$$\lambda = 0, \quad \delta = 1$$

$$(z-z_0)^2 = \frac{a^2}{u}, \quad r^2 = \frac{b^2}{u},$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{-a}{2\sqrt{u^3}}, \quad \frac{dr}{du} = \frac{-b}{2\sqrt{u^3}},$$

$$t = \int \frac{b\sqrt{a^2+b^2}\,du}{2u\sqrt{2b^2\left[-\frac{\mu}{2}(z_0^2 u + 2az_0\sqrt{u} + a^2+b^2) + hu\right] - c^2u^2}}.$$

Setzt man $\sqrt{u} = t$, so ergibt sich ein elliptisches Integral, also entspricht die Annahme den geforderten Bedingungen, und man hat:

$$\frac{(z-z_0)^2}{a^2} = \frac{r^2}{b^2}, \quad \boldsymbol{r^2 - m(z-z_0)^2 = 0} \quad \textbf{Kegel.}$$

Das Anziehungszentrum liegt in einem beliebigen Punkt der Achse.

$$\varkappa = 0, \quad k = 1,$$
$$\lambda = 1, \quad \delta = 0,$$

$$(z-z_0)^2 = \frac{a^2}{u}, \quad r^2 = \frac{u}{b^2},$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{-a}{2\sqrt{u^3}}, \quad \frac{dr}{du} = \frac{1}{2b\sqrt{u}},$$

$$t = \int \frac{\sqrt{u}\sqrt{\frac{1}{4b^2u} + \frac{a^2}{4u^3}}\,du}{b\sqrt{\frac{2u}{b}\left[-\frac{\mu}{2}\left(z_0^2 + \frac{2az_0}{\sqrt{u}} + \frac{a}{u} + \frac{u}{b^2}\right) + h\right] - c^2}}.$$

Würde man einführen $\sqrt{u} = t$, so würde sich unter dem Wurzelzeichen eine Funktion von höherem als dem vierten Grade ergeben, also ist die Annahme ausgeschlossen.

Kein Resultat ergeben folgende Fälle:

$$\begin{array}{lll} \varkappa = 0,\ k = 1 & \varkappa = 0,\ k = 1 & \varkappa = 1,\ k = 0 \\ \lambda = 1,\ \delta = 1\text{'} & \lambda = 2,\ \delta = 0\text{'} & \lambda = 0,\ \delta = 1\text{'} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varkappa = 1,\ k = 0 \\ \lambda = 1,\ \delta = 0\text{'} \end{array} \qquad r^2 = b^2 u, \quad (z - z_0)^2 = a^2 u,$$

$$r^2 - m(z - z_0)^2 = 0 \quad \text{Kegel.}$$

Auch führen folgende Annahmen zu keinem Resultat:

$$\begin{array}{llll} \varkappa = 1,\ k = 0 & \varkappa = 1,\ k = 1 & \varkappa = 1,\ k = 1 & \varkappa = 1,\ k = 2 \\ \lambda = 1,\ \delta = 1\text{'} & \lambda = 0,\ \delta = 1\text{'} & \lambda = 1,\ \delta = 0\text{'} & \lambda = 0,\ \delta = 1\text{'} \\ \varkappa = 1,\ k = 2 & \varkappa = 1,\ k = 2 & \varkappa = 1,\ k = 2 & \varkappa = 2,\ k = 0 \\ \lambda = 1,\ \delta = 0\text{'} & \lambda = 1,\ \delta = 1\text{'} & \lambda = 1,\ \delta = 2\text{'} & \lambda = 0,\ \delta = 1\text{'} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varkappa = 2,\ k = 0 \\ \lambda = 1,\ \delta = 0\text{'} \end{array} \qquad r^2 = mu, \quad (z - z_0)^2 = a^2 u^2,$$

$$r^2 = \frac{m}{a}(z - z_0) \quad \text{Paraboloid.}$$

$$\begin{array}{l} \varkappa = 2,\ k = 0 \\ \lambda = 1,\ \delta = 1\text{'} \end{array} \quad \text{Kein Resultat.}$$

$$\begin{array}{l} \varkappa = 2,\ k = 0 \\ \lambda = 1,\ \delta = 0\text{'} \end{array} \quad \text{a)} \quad (z - z_0)^2 = a^2 u^2, \quad r^2 = b^2 u^2,$$

$$r^2 - m(z - z_0)^2 = 0 \quad \text{Kegel.}$$

$$\text{b)} \quad (z - z_0)^2 = a^2 + bu^2, \quad r^2 = m^2 u^2,$$

$$t = \int \frac{mu\sqrt{m^2 + \dfrac{b^2 u^2}{a^2 + bu^2}}\, du}{\sqrt{2m^2 u^2 \left\{ -\frac{\mu}{2}(m^2 u^2 + z_0^2 + 2z_0\sqrt{a^2 + bu^2} + a^2 + bu^2) + h \right\} - c^2}}.$$

Ist $b = -m^2$, so wird die Wurzel im Zähler $\sqrt{a^2 m^2}$, also

$$t = \int \frac{am^2 u\, du}{\sqrt{2m^2 u^2 \left\{ -\frac{\mu}{2}(z_0^2 + 2z_0\sqrt{a^2 + bu^2} + a^2) + h \right\} - c^2}}.$$

Durch die Substitution $u^2 = v$, $\sqrt{a^2 + bv} = t$ läfst sich dieses Integral in ein elliptisches überführen.

$$r^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \quad \text{Kugel.}$$

Kein Resultat ergeben die Annahmen:

$x = 2,\ k = 0 \quad x = 2,\ k = 1 \quad x = 2,\ k = 1$
$\lambda = 2,\ \delta = 1\ ' \quad \lambda = 0,\ \delta = 1\ ' \quad \lambda = 1,\ \delta = 1\ '$

$x = 2,\ k = 1$
$\lambda = 2,\ \delta = 1\ ' \quad r^2 - m\,(z - z_0)^2 = 0$ Kegel.

$x = 2,\ k = 2 \quad x = 2,\ k = 2$
$\lambda = 0,\ \delta = 1\ ' \quad \lambda = 1,\ \delta = 1\ '$ Kein Resultat.

Die Annahme $(r - r_0)^2 = \varphi(u),\ z^2 = \varphi_1(u)$ ergibt ein Resultat für den Fall, dafs $z^2 = a^2 u^2$, $(r - r_0)^2 = b^2 u^2$ ist.

Man erhält die Fläche:

$$z^2 - m\,(r - r_0)^2 = 0.$$

Ist die Kräftefunktion $= -\frac{\mu}{2}\varrho^2$, so werden die Integrale (A) aufser für Ebene und Kreiszylinder noch für folgende Flächen elliptisch:

r^2	z^2	$f(r, z - z_0)$
a_1	a_3	$r^2 - m z^2 = 0$
$a_2 + b_2 u$	$a_2 + b_2 u$	
a_1	$a_2 + b_2 u$	$r z = a$
$a_2 + b_2 u$	a_4	
a^2	$\frac{8 + 9 a^2 u}{u}$	$a^2 z^2 - r^2 z^2 + a^2 r^2 = 9 a^4$
$1 + a^2 u$	u^2	
a_1	$a_2 + b_2 u$	$r z = a^2 - r^2$
$a_2 + b_2 u$	m^2	
$(m^2 u - 8)\, m^2$	$m^2 u - 6$	$z^2 (2 m^2 - 27 r^2) = m^4$
-27	$a_3 + u$	$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad a_1 - a_3 > 0$
$a_1 + u$	a_4	$\frac{z^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1, \quad a_1 - a_3 < 0$
a_2	$a_3 - u$	$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$
$a + u$	a_4	
a	$\frac{u - 8a}{u}$	$z^2 (r^2 - 1) = r^2 - 9$
$a_1 + b_1 u$	u^2	$r^2 = 2p\,(z - z_0)$
$2a^2 - u$	$\frac{(u - a^2)^2}{u}$	$r^4 - 2a^2 r^2 + r^2 z^2 - 2a^2 z^2 + a^4 = 0$
$m^2 u - 16 m^4$	$\frac{(4m^2 + u)^2}{u}$	$z^2 (m^2 - r^2) = (5m^2 - r^2)^2$
u	u^2	$r^2 + z^2 = a^2$
$a^2 - u^2$	$\frac{a^3 u^2 + a^2 u - a}{u}$	$r^4 + r^2 z^2 - a^2 r^2 = a^4$
$\frac{a}{u}$	$\frac{a^2}{u}$	
b^2	$a^2 - m^2 u^2$	$r^2 - m\,(z - z_0)^2 = 0$
u		$(z - z_0)^2 + r^2 = a^2$
$m^2 u^2$	$a^2 u^2$	$z^2 - m\,(r - r_0)^2 = 0$
$(r - r_0)^2$		
$b^2 u^2$		

II.

Bestimmung der Flächen für die Kräftefunktion $U = \frac{\mu}{2\varrho^2}$.

Nimmt man die Anziehung umgekehrt proportional an der dritten Potenz, so wird die Kräftefunktion $U = \frac{\mu}{2\varrho^2}$. Die Untersuchung kann in derselben Weise geführt werden wie im vorigen Kapitel, oder aber in der Weise, dafs man die Fläche als Funktion von ϱ^2 und z oder von ϱ^2 und r auffafst, wo ϱ den Abstand des Punktes vom anziehenden Zentrum bezeichnet.

Wendet man die erste Art der Untersuchung an, so werden, wie im vorigen Kapitel, r^2 und z^2 als rationale Funktionen von u angenommen, man kann also den Ansatz machen:

$$r^2 = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}, \quad z^2 = \frac{f_2(u)}{f_4(u)}, \quad \varrho^2 = \frac{f_1 f_4 + f_2 f_3}{f_2 f_4}.$$

Dann wird:

$$\frac{dr}{du} = \frac{f_2 f_1' - f_1 f_2'}{2 f_2 \sqrt{f_1 f_2}}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{f_4 f_3' - f_3 f_4'}{2 f_4 \sqrt{f_3 f_4}}.$$

Es ist:

$$(A) \qquad t = \int \frac{r\sqrt{dr^2 + dz^2}}{\sqrt{2r^2\left[\frac{\mu}{2\varrho^2} + h\right] - c^2}}.$$

Durch Einsetzen der für r^2 und z^2 angenommenen und der für $\frac{dr}{du}$ und $\frac{dz}{du}$ aus denselben berechneten Ausdrücke geht das Integral in das folgende über:

$$(A) \quad t = \int \frac{\sqrt{f_3 f_4^3 [f_2 f_1' - f_1 f_2']^2 + f_1 f_2^3 [f_4 f_3' - f_3 f_4']^2}\sqrt{f_1 f_4 + f_2 f_3}\, du}{2\sqrt{f_2^3}\sqrt{f_3}\sqrt{f_4^3}\sqrt{f_1 [\mu f_2 f_4 + 2h(f_1 f_4 + f_2 f_3)] - f_2 c^2 (f_1 f_4 + f_2 f_3)}}.$$

Bezeichnet man $f_1 \{\mu f_2 f_4 + 2h(f_1 f_4 + f_2 f_3)\} - f_2 c^2 (f_1 f_4 + f_2 f_3)$ durch $\Gamma(u)$, so wird die Bedingung dafür, dafs das Integral (A) elliptisch werde:

$$f_2^3 f_3 f_1^3 \Gamma(u) \{f_3 f_4^3 [f_2 f_1' - f_1 f_2']^2 + f_1 f_2^3 [f_4 f_3' - f_3 f_4']^2\} [f_1 f_4 + f_2 f_3) = F^2 F_4.$$

Es wird $F_4 = \Gamma(u)\ \Gamma''(u)$ und es ist zu untersuchen, für welche Werte von $f_1 \dots f_4$ der Ausdruck, mit dem $\Gamma(u)$ multipliziert ist, ein vollständiges Quadrat wird. Es sind f_1 und f_2, f_3 und f_4, f_1 und f_3 als teilerfremd anzunehmen. Soll $\Gamma(u)$ von nicht höherem als dem vierten Grade sein, so ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen für $\lambda_1 \dots \lambda_4$, wenn $\lambda_1 \dots \lambda_4$ den Grad von $f_1 \dots f_4$ bezeichnen:

(1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \leqq 4$, (3) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqq 4$,

(2) $2\lambda_1 + \lambda_4 \leqq 4$, $2\lambda_2 + \lambda_3 \leqq 4$.

Es ist zu untersuchen, welche unter den nach den Bedingungsgleichungen möglichen Annahmen:

$$f_2 f_3 f_1 [f_1 f_4 + f_2 f_3] \{f_3 f_4^3 [f_2 f_1' - f_1 f_2']^2 + f_1 f_2^3 [f_1 f_3' - f_3 f_4']^2\}$$

zu einem vollständigen Quadrat machen.

Für $y^2 = a^2$, $z^2 = b^2$, also für Kreiszylinder und Ebene ist die Aufgabe möglich und es sind daher bei der folgenden Untersuchung nur die Fälle zu berücksichtigen, die andere Flächen ergeben. In einigen Fällen läfst sich bei der Untersuchung Satz 1 des vorigen Kapitels anwenden.

(A) $\lambda_1 = 0$, I) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\lambda_3 = 0$.

a) $\lambda_4 = 1$, $(a_2 + b_2 u) a_3 (a_1 + b_4 u) [a_1 (a_4 + b_4 u) + a_3 (a_2 + b_2 u)] \cdot \{a_3 (a_4 + b_4 u)^3 [- a_4 b_2]^2 + a_4 (a_2 + b_2 u)^3 [- a_3 b_4]^2\} = F^2$.

Ist $f_2 = f_4$, so ergibt sich:

$$(a_2 + b_2 u)^6 a_3 (a_4 + a_3) [a_3 a_4^2 b_2^2 + a_4 a_3^2 b_4^2] = F^2,$$

$$r^2 = \frac{a_4}{a_2 + b_2 u}, \quad z^2 = \frac{a_3}{a_2 + b_2 u}.$$

$$r^2 - m z^2 = 0. \quad \text{Kegel.}$$

Das Anziehungszentrum liegt in der Spitze des Kegels. In diesem Falle ergeben sich elementare Integrale. Bei anderer Lage des Anziehungszentrums werden die Integrale hyperelliptisch.

b) $\lambda_4 = 2$. Kein Resultat.

c) $\lambda_4 = 3$. „ „

(2) $\lambda_3 = 1$.

a) $\lambda_4 = 0$, $(a_2 + b_2 u)(a_3 + b_3 u) a_4 [a_4 a_4 + (a_2 + b_2 u)(a_3 + b_3 u)] \cdot \{(a_3 + b_3 u) a_4^3 a_4^2 b_2^2 + a_4 (a_2 + b_2 u)^3 a_4^2 b_3^2\} = F^2$.

Da sich aus den Klammerausdrücken weder $a_2 + b_2 u$ noch $a_3 + b_3 u$ absondern läfst, so ist nur die Annahme noch zulässig, dafs $a_2 + b_2 u = a_3 + b_3 u$ ist. Setzt man $f_2 = f_3 = u$, so geht die Bedingung über in:

$$u^2 a_4 [a_1 a_4 + u^2] [a_4^3 u a_1^2 + a_1 u^3 a_4^2] = u^3 a_1 a_4^3 [a_1 a_4 + u^2]^2 = F^2.$$

Da $\gamma = 3$ ist, so führt die Annahme zu einem Resultat und man hat:

$$r^2 = \frac{a}{u}, \quad z^2 = \frac{u}{a_4}, \quad r z = a.$$

Die Aufgabe ist nur möglich bei einer Lage des anziehenden Zentrums, wenn das Anziehungszentrum im Mittelpunkt der Fläche liegt.

b) $\lambda_4 = 1$,

$$(a_2 + b_2 u)(a_3 + b_3 u)(a_4 + b_4 u)[a_1 (a_4 + b_4 u) + (a_2 + b_2 u)(a_3 + b_3 u)] \cdot \{(a_3 + b_3 u)(a_4 + b_4 u)^3 a_1^2 b_2^2 + a_1 (a_2 + b_2 u)^3 [b_3 a_4 - a_3 b_4]^2\} = F^2.$$

Ist $f_2 = f_4$, so bleibt als Bedingungsgleichung:

$$(a_2 + b_2 u)^6 (a_3 + b_3 u)[a_1 + a_3 + b_3 u] \{(a_3 + b_3 u) a_1^2 b_2^2 + a_1 [b_3 a_4 - a_3 b_4]^2\} = F^2.$$

Da $\gamma = 3$ ist, kann $a_3 + b_3 u$ Bestandteil von $\Gamma'(u)$ sein. Damit

$$(a_1 + a_3 + b_3 u) \{(a_3 + b_3 u) a_1^2 b_2^2 + a_1 (b_3 a_4 - a_3 b_4)^2\}$$

ein vollständiges Quadrat wird, ist erforderlich, dafs $a_1 = b_2 = b_4 = 1$ und $b_3 a_4 - a_3 b_4 = 1$ wird, also $b_3 = \frac{1 + a_3}{a_4}$.

Setzt man noch $a_4 = 1$, so ist:

$$r^2 = \frac{1}{1 + u}, \quad z^2 = \frac{a_3 + (1 + a_3) u}{1 + u}$$

$$r^2 + z^2 = a^2. \quad \text{Kugel.}$$

c) $\lambda_4 = 2$. Kein Resultat.

(3) $\lambda_3 = 2$.

a) $\lambda_4 = 0$. Kein Resultat, Satz 1 des vorigen Kapitels.

b) $\lambda_4 = 1$. „ „

c) $\lambda_4 = 2$. „ „ Satz 1 des vorigen Kapitels.

II) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\lambda_3 = 0$.

a) $\lambda_4 = 1$. Kein Resultat, Satz 1.

b) $\lambda_4 = 2, \quad f_2 = u^2.$

$u^2 a_3 (a_1 + b_1 u + c_1 u^2) [a_1 (a_1 + b_1 u + c_1 u^2) + u^2 a_3] \cdot$
$\{a_3 (a_1 + b_1 u + c_1 u^2)^3 [-2 a_1 u]^2 + a_1 u^6 [-a_3 (b_1 + 2 c_1 u)]^2\} = F^2.$

Für $f_4 = u^2$ ergibt sich:

$$u^{14} a_3 [a_1 + a_3] \{4 a_1^2 a_3 + 4 a_1 a_3^2\}$$

$$r^2 = \frac{a_1}{u^2}, \quad z^2 = \frac{a_3}{u^2}, \quad \boldsymbol{r^2 - m z^2 = 0.} \quad \text{Kegel.}$$

(B) $\lambda_1 = 1.$ I) $\lambda_2 = 0.$

(1) $\lambda_3 = 0.$

a) $\lambda_4 = 1, \quad r^2 = \frac{u}{a_2}, \quad z^2 = \frac{a_3}{u}, \quad \boldsymbol{rz = a.}$

b) $\lambda_4 = 2.$ Satz 1.

(2) $\lambda_3 = 1.$

a) $\lambda_4 = 0, \quad \boldsymbol{r^2 - m z^2 = 0.}$ Kegel.

b) $\lambda_4 = 1.$ Kein Resultat.

c) $\lambda_4 = 2.$ „ „ Satz 1.

(3) $\lambda_3 = 2.$

a) $\lambda_4 = 0, \quad f_3 = u^2.$

$a_2 u^2 a_1 [(a_1 + b_1 u) a_1 + a_2 u^2] \{u^2 a_1^3 a_2^2 b_1^2 + (a_1 + b_1 u) a_2^3 [2 a_1 u]^2\} = F^2.$
$u^4 a_2 a_1 [a_1 a_1 + a_1 b_1 u + a_2 u^2] \{a_1^3 a_2^2 b_1^2 + 4 a_2^3 a_1^2 (a_1 + b_1 u)\} = F^2.$

Da $\gamma = -3$ ist, kann der Ausdruck in der letzten Klammer Bestandteil von $I''(u)$ werden. Damit $a_1 a_1 + a_1 b_1 u + a_2 u^2$ gleich einem vollständigen Quadrat $= (\alpha + \beta u)^2$ wird, müssen folgende Gleichungen bestehen:

(1) $a_1 a_1 = \alpha^2,$
(2) $a_2 = \beta^2,$
(3) $a_1 b_1 = 2 \alpha \beta.$

Aus (1) folgt: $\alpha = \sqrt{a_1 a_1},$
„ (2) „ $\beta = \sqrt{a_2}.$

Setzt man diese Werte für α und β in (3) ein, so ergibt sich:

(3 a) $a_1 b_1 = 2 \sqrt{a_1 a_1} \sqrt{a_2}.$

Setzt man $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = 2b$, so wird $a_1 = b^2$, also:

$r^2 = b^2 + 2bu, \quad z^2 = u^2. \quad \boldsymbol{r^2 = b(b + 2z).}$ Paraboloid.

Das anziehende Zentrum liegt im Brennpunkt des Paraboloids.

b) $\lambda_4 = 1.$ Kein Resultat.

c) $\lambda_4 = 2.$ Satz 1.

(4) $\lambda_3 = 3$.

a) $\lambda_4 = 0$. Satz 1.

b) $\lambda_4 = 1$. Kein Resultat.

c) $\lambda_4 = 2$. „ „ Satz 1.

II) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\lambda_3 = 0$.

a) $\lambda_4 = 1$, $f_2 = u$.

$$u\,a_3\,(a_4 + b_4 u)\,[(a_1 + b_1 u)\,(a_4 + b_4 u) + u\,a_3]\cdot \\ \{a_3\,(a_4 + b_4 u)^3\,a_1{}^2 + (a_1 + b_1 u)\,u^3\,[-a_3 b_4]^2\} = F^2.$$

Setzt man $f_2 = f_4 = u$, so erhält man:

$$u^6\,a_3{}^2\,[a_1 + a_3 + b_1 u]\,\{a_1{}^2 + a_1 a_3 + b_1 a_3 u\}.$$

Die beiden Klammerausdrücke müssen einander gleich sein. Aus dieser Bedingung ergeben sich folgende Gleichungen:

(1) $b_1 = b_1 a_3$,

(2) $a_1 + a_3 = a_1{}^2 + a_1 a_3$.

Aus (1) folgt: $a_3 = 1$; aus (2): $a_1 = 1$.

Setzt man $b_1 = b^2$, so wird

$$r^2 = \frac{1 + b^2 u}{u}, \quad z^2 = \frac{1}{u}.$$

Durch Elimination von u folgt daraus:

$$r^2 - z^2 = b^2. \quad \text{Hyperboloid.}$$

Die Aufgabe führt nur dann auf elliptische Integrale, wenn das Anziehungszentrum im Mittelpunkt des Hyperboloids liegt.

b) $\lambda_4 = 2$. Kein Resultat.

(2) $\lambda_3 = 1$.

a) $\lambda_4 = 0$. Kein Resultat.

b) $\lambda_4 = 1$, $f_2 = f_4 = u$, $r^2 - m z^2 = 0$. Kegel.

c) $\lambda_4 = 2$. Kein Resultat. Satz 1.

(3) $\lambda_3 = 2$.

a) $\lambda_4 = 0$. Kein Resultat.

b) $\lambda_4 = 1$. „ „

c) $\lambda_4 = 2$. „ „

III) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\lambda_3 = 0$. a) $\lambda_4 = 1$. Kein Resultat.

(C) $\lambda_1 = 2$. I) $\lambda_2 = 0$.

(1) $\lambda_3 = 1$.

a) $\lambda_4 = 0$. Kein Resultat.

(2) $\lambda_3 = 2$. a) $\lambda_4 = 0$, $r^2 - mz^2 = 0$. Kegel.

II) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 0$. Kein Resultat.

(2) $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 0$. „ „ Satz 1.

Eine besondere Untersuchung erfordern wie im vorigen Kapitel die Fälle, für welche r^2 und z^2 gebrochene, dagegen ϱ^2 oder $\frac{1}{\varrho^2}$ ganze Funktionen von u sind. $\varkappa$ möge den Grad von ϱ^2, $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ den Grad von $G_1 \ldots G_4$ bezeichnen. Es ist

$$\varrho^2 = \frac{G_1}{G_2} + \frac{G_3}{G_4} = \frac{G_1 G_4 + G_2 G_3}{G_2 G_4}.$$

Nimmt man zunächst $\varkappa = 1$, $\lambda_4 = 1$, $G_2 = 1$, $G_4 = u$ an, so wird:

$$\varkappa = 1 \qquad \frac{G_1 G_4 + G_1 G_3}{G_2 G_4} = m + nu = \varrho^2,$$
$$\lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 1, \qquad \frac{G_1 u + G_3}{u} = m + nu.$$

Die Annahme ergibt kein Resultat, da G_3 u als Faktor enthalten, G_3 und G_4 also nicht teilerfremd sein würden.

$$\varkappa = 1 \qquad G_4 = u^2, \quad \frac{G_1 u + G_3}{u^2} = m + nu.$$
$$\lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 2,$$

Kein Resultat, aus demselben Grunde wie vorher.

$$\varkappa = 1$$
$$\lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 3. \qquad \text{Kein Resultat.}$$

$$\varkappa = 1$$
$$\lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 0. \qquad \text{Kein Resultat.}$$

$$\varkappa = 1 \qquad \frac{G_1 u + G_3 u}{u^2} = m + nu.$$
$$\lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 1.$$

$$G_1 + G_3 = mu + nu^2.$$

$$G_1 = \alpha + \beta u, \quad G_3 = (\delta u + \gamma)^2.$$

$$(1) \quad \alpha + \beta u + \delta^2 u^2 + 2\delta\gamma u + \gamma^2 = mu + nu^2.$$

$$r^2 = \frac{\alpha + \beta u}{u}, \quad z^2 = \frac{(\delta u + \gamma)^2}{u},$$

$$\frac{dr}{du} = \frac{\alpha}{2\sqrt{u^3}\sqrt{\alpha+\beta u}}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{\delta u - \gamma}{2\sqrt{u^3}},$$

$$t = \int \frac{\sqrt{\alpha+\beta u}\sqrt{\frac{(\delta u-\gamma)^2}{4u^3} + \frac{\alpha^2}{4u^3(\alpha+\beta u)}}\,du}{\sqrt{u}\sqrt{2(\alpha+\beta u)\left\{\frac{\mu}{2}\frac{1}{m+nu}+h\right\} - c^2}}.$$

(2) $(\delta^2u^2 - 2\delta\gamma u + \gamma^2)(\alpha+\beta u) + \alpha^2$
$= \alpha\delta^2u^2 - 2\alpha\delta\gamma u + \alpha\gamma^2 + \beta\delta^2u^3 - 2\beta\gamma\delta u^2 + \gamma^2\beta u + \alpha^2.$

Aus (1) folgt: $\alpha = -\gamma^2,$
$\beta + 2\delta\gamma = m,$
$\delta^2 = n.$

Wird $\gamma^2 = -\alpha$ in Gleichung (2) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\beta\delta^2u^3 + u^2(\alpha\delta^2 - 2\beta\sqrt{-\alpha\delta}) - u(2\alpha\delta\sqrt{-\alpha} + \alpha\beta)$$
$$= u\{\beta\delta^2u^2 + u(\alpha\delta^2 - 2\beta\sqrt{-\alpha\delta}) - (2\alpha\delta\sqrt{-\alpha} + \alpha\beta)\} = u(A - Bu)^2.$$

Ist $\delta = 1$, so ergibt sich, wenn man $\alpha = -a$ einsetzt:

$$u\{\beta u^2 - u(a + 2\beta\sqrt{a}) + 2a\sqrt{a} + a\beta\} = u(A^2 - 2Bu + B^2u^2).$$

a) $A^2 = \beta, \qquad A = \sqrt{\beta}.$

b) $2AB = a + 2\beta\sqrt{a},$

c) $B^2 = 2a\sqrt{a} + a\beta, \qquad B = \sqrt{2a\sqrt{a} + a\beta}.$

Setzt man die beiden für A und B gefundenen Werte in Gleichung b) ein, so ergibt sich, nachdem beide Seiten der Gleichung quadriert und durch a dividiert worden sind:

$$\beta) \quad 4\beta(2\sqrt{a} + \beta) = a + 4\beta\sqrt{a} + 4\beta^2.$$

Daraus folgt: $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{a}.$

Also wird:

$$r^2 = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{a}u - a}{u}, \quad z^2 = \frac{(u+\sqrt{a})^2}{u}.$$

Ist $a = 16m^4$, so wird:

$$r^2 = \frac{m^2u - 16m^4}{u}, \quad z^2 = \frac{(4m^2+u)^2}{u},$$

und es ergibt sich nach Elimination von u:

$$z^2(m^2 - r^2) = (5m^2 - r^2)^2.$$

$$\begin{matrix} x = 1 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 2' \end{matrix} \quad \frac{G_1 u^2 + G_3 u}{u^2} = m + n u. \quad \text{Kein Resultat.}$$

Kein Resultat ergeben ferner die Fälle:

$$\begin{matrix} x = 1 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 3' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 0' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 1' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 1 \\ \lambda_2 = \lambda_4 = 2' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 3' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_4 = 4; \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 1' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 2' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 0' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 1' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 2' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 3' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 4' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 0' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 1' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = \lambda_4 = 2' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 3; \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 3 \\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 1' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 3 \\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 2' \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 3 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 0' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 3 \\ \lambda_2 = \lambda_4 = 1; \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 4 \\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 1' \end{matrix}$$

Es kann ferner $\frac{1}{\varrho^2}$ eine ganze Funktion von u sein. Bezeichnet wieder x den Grad von $\frac{1}{\varrho^2}$, $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ den Grad von $G_1 \ldots G_4$, so wird, da $\varrho^2 = \frac{G_1 G_4 + G_2 G_3}{G_2 G_4}$ ist, für $x = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_4 = 1$:

$$\begin{matrix} x = 1 \\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 1' \end{matrix} \quad \varrho^2 = \frac{G_1 u + G^3}{u} = \frac{m}{u},$$

also $G_3 = m - G_1 u$.

Macht man den Ansatz:

$$G_1 = p + n u,$$

so folgt:

$$G_3 = m - p u - n u^2.$$

Ist $p = 2a^2$, $n = -1$, so ergibt sich ein Resultat, wenn der Zähler von G_3 gleich einem vollständigen Quadrat $= (a^2 - u)^2$ ist. Also hat man:

$$r^2 = 2a^2 - u, \quad z^2 = \frac{(a^2 - u)^2}{u},$$

oder nach Elimination von u:

$$(2a^2 - r^2)z^2 = (a^2 - r^2)^2.$$

Die Fälle

$$\begin{array}{lll} \varkappa = 1 & \varkappa = 1 & \varkappa = 1 \\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 2\text{'} & \lambda_2 = 0,\ \lambda_4 = 3\text{'} & \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 0 \end{array}$$

ergeben kein Resultat.

$$\begin{array}{l} \varkappa = 1 \\ \lambda_2 = \lambda_4 = 1\text{'} \end{array} \qquad \frac{G_1 u + u G_3}{u^2} = \frac{2a}{u}.$$

a) $G_1 = a - u^2$, $G_3 = a + u^2$ ergibt kein Resultat.

b) $r^2 = \dfrac{a + bu}{u}$, $z^2 = \dfrac{a - bu}{u}$.

$$\frac{dr}{du} = \frac{-a}{2\sqrt{a - bu}\sqrt{u^3}}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{-a}{2\sqrt{a + bu}\sqrt{u^3}}.$$

$$t = \int \frac{\sqrt{u + bu}\sqrt{\dfrac{a^2}{4u^3(a - bu)} + \dfrac{a^2}{4u^3(a + bu)}}\, du}{\sqrt{u}\sqrt{\dfrac{2(a + bu)}{u} - \left\{\dfrac{u}{2}\dfrac{u}{a^2} + h\right\} - c^2}}.$$

Das Integral ist elliptisch; ferner erhält man aus $r^2 = \dfrac{a + bu}{u}$ und $z^2 = \dfrac{a - bu}{u}$ nach Elimination von u die Fläche:

$$r^2 - z^2 = 2b.$$

Kein Resultat ergibt sich für die Annahmen:

$$\begin{array}{llll} \varkappa = 1 & \varkappa = 1 & \varkappa = 1 & \varkappa = 1 \\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 2\text{'} & \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 3\text{'} & \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 0\text{'} & \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 1\text{'} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varkappa = 1 \\ \varkappa = 2,\ \lambda_4 = 2\text{'} \end{array} \qquad \frac{G_1 u^2 + u^2 G_3}{u^4} = \frac{4m^2}{u}.$$

$$r^2 = \frac{4m^2(u - 1)}{u^2}, \quad z^2 = \frac{4m^2}{u^2}.$$

$$r^2 + (z^2 - m)^2 = m^2. \quad \text{Kugel.}$$

Kein Resultat ergeben ferner die Annahmen:

$$\begin{array}{llll} \varkappa = 1 & \varkappa = 1 & \varkappa = 1 & \varkappa = 1 \\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 3\text{'} & \lambda_2 = 2,\ \lambda_4 = 4\text{'} & \lambda_2 = 3,\ \lambda_4 = 0\text{'} & \lambda_2 = 3,\ \lambda_4 = 1\text{'} \\ \varkappa = 1 & \varkappa = 1 & \varkappa = 1 & \varkappa = 1 \\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_4 = 2\text{'} & \lambda_2 = 3,\ \lambda_4 = 3\text{'} & \lambda_2 = 3,\ \lambda_4 = 4\text{'} & \lambda_2 = 4,\ \lambda_4 = 0\text{'} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \varkappa=1 & \varkappa=1 & \varkappa=1 & \varkappa=1 \\ \lambda_2=4,\ \lambda_4=1\text{'} & \lambda_2=4,\ \lambda_4=2\text{'} & \lambda_2=4,\ \lambda_4=3\text{'} & \lambda_2=\lambda_4=4\text{'} \\ \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 \\ \lambda_2=0,\ \lambda_4=1\text{'} & \lambda_2=0,\ \lambda_4=2\text{'} & \lambda_2=0,\ \lambda^4=3\text{'} & \lambda_2=0,\ \lambda_4=4\text{'} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \varkappa=2 & \varkappa=2 \\ \lambda_2=1,\ \lambda_4=0\text{'} & \lambda_2=\lambda_4=1\text{'} \end{array}$$

$$\varkappa=2 \qquad \frac{G_1u^2+G_3u}{u^3}=\frac{a^2}{u^2}. \quad G_3=a^2-G_1u, \quad G_1=b^2.$$
$$\lambda_2=1,\ \lambda_4=2\text{'}$$

$$r^2=\frac{b^2}{u}. \quad z^2=\frac{a^2-b^2u}{u^2},$$

$$\frac{dr}{du}=\frac{-b}{2\sqrt{u^3}}, \quad \frac{dz}{du}=\frac{b^2u-2a^2}{2u^2\sqrt{a^2-b^2u}}.$$

$$t=\int \frac{b\sqrt{4a^4-3a^2b^2u}\,du}{2u^2\sqrt{a^2-b^2u}\sqrt{2b^2\left\{\frac{u}{2}\frac{u^2}{a^2}+h\right\}-c^2u}}.$$

Das Integral ist elliptisch, also genügt die Annahme den gestellten Bedingungen, und es ergibt sich durch Elimination von u aus den Ausdrücken

$$r^2=\frac{b^2}{u}, \quad z^2=\frac{a^2-b^2u}{u^2},$$

wenn noch $a=b$ gesetzt wird, die Fläche:

$$r^4-b^2r^2-b^2z^2=0.$$

Folgende Fälle ergeben kein Resultat:

$$\begin{array}{cccc} \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 \\ \lambda_2=1,\ \lambda_4=3\text{'} & \lambda_2=1,\ \lambda_4=4\text{'} & \lambda_2=2,\ \lambda_4=0\text{'} & \lambda_2=2,\ \lambda_4=1\text{'} \\ \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 \\ \lambda_2=\lambda_4=2\text{'} & \lambda_2=2,\ \lambda_4=3\text{'} & \lambda_2=2,\ \lambda_4=4\text{'} & \lambda_2=3,\ \lambda_4=0\text{'} \\ \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 \\ \lambda_2=3,\ \lambda_4=1\text{'} & \lambda_2=3,\ \lambda_4=2\text{'} & \lambda_2=\lambda_4=3\text{'} & \lambda_2=3,\ \lambda_4=4\text{'} \\ \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 & \varkappa=2 \\ \lambda_2=4,\ \lambda_4=0\text{'} & \lambda_2=4,\ \lambda_4=1\text{'} & \lambda_2=4,\ \lambda_4=2\text{'} & \lambda_2=4,\ \lambda_4=3\text{'} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \varkappa=2 & \frac{G_1u^4+u^4G_3}{u^3}=\frac{a^2}{u^2}. \\ \lambda_2=\lambda_4=4\text{'} & \end{array}$$

$$G_1+G_3=a^2u^2, \quad G_1=a^2u^2-b^2,$$

wenn $G_3=b^2$ angenommen wird.

$$r^2 = \frac{a^2u^2 - b^2}{u^4}, \quad z^2 = \frac{b^2}{u^4},$$

$$z = \frac{b}{u^2}, \quad r = \frac{\sqrt{a^2u^2 - b^2}}{u^2},$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{-2b}{u^3}, \quad \frac{dr}{du} = \frac{2b^2 - a^2u^2}{u^3\sqrt{a^2u^2 - b^2}},$$

$$t = \int \frac{\sqrt{a^2u^2 - b^2}\sqrt{\frac{4b^2}{u^2} + \frac{(2b^2 - a^2u^2)^2}{u^6(a^2u^2 - b^2)}}\,du}{u^2\sqrt{2\frac{a^2u^2 - b^2}{u^4}\left\{\frac{\mu}{2}\frac{u^2}{a^2} + h\right\} - c^2}}.$$

$a^2 = m$, $r^2 + z^2 - mz = 0$. Kugel.

Kein Resultat ergeben folgende Annahmen:

$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$
$\lambda_2 = 0, \lambda_4 = 1$'	$\lambda_2 = 0, \lambda_4 = 2$'	$\lambda_2 = 0, \lambda_4 = 3$'	$\lambda_2 = 0, \lambda_4 = 4$'
$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$
$\lambda_2 = 0, \lambda_4 = 5$'	$\lambda_2 = 1, \lambda_4 = 0$'	$\lambda_2 = 1, \lambda_4 = 1$'	$\lambda_2 = 1, \lambda_4 = 2$'
$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$
$\lambda_2 = 1, \lambda_4 = 3$'	$\lambda_2 = 2, \lambda_4 = 0$'	$\lambda_2 = 2, \lambda_4 = 1$'	$\lambda_2 = \lambda_4 = 2$'
$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$
$\lambda_2 = 2, \lambda_4 = 3$'	$\lambda_2 = 2, \lambda_4 = 4$'	$\lambda_2 = 3, \lambda_4 = 0$'	$\lambda_2 = 3, \lambda_4 = 1$'
$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$
$\lambda_2 = 3, \lambda_4 = 2$'	$\lambda_2 = 3, \lambda_4 = 3$'	$\lambda_2 = 3, \lambda_4 = 4$'	$\lambda_2 = 4, \lambda_4 = 0$'
$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$
$\lambda_2 = 4, \lambda_4 = 1$'	$\lambda_2 = 4, \lambda_4 = 2$'	$\lambda_2 = 4, \lambda_4 = 3$'	$\lambda_2 = \lambda_4 = 4$'

Auch alle Annahmen $x = 4$ führen zu keinem Resultat.

In der zweiten Art der Untersuchung wird die Flächengleichung als Gleichung zwischen ϱ^2 und z^2 angenommen, wo ϱ den Abstand des angezogenen Punktes vom anziehenden Zentrum bezeichnet. Es sei also die Flächengleichung $f(\varrho^2, z) = 0$, und der Anfangspunkt des Koordinatensystems liege im anziehenden Zentrum.

Aus $\varrho^2 = r^2 + z^2$ folgt:

$$r = \sqrt{\varrho^2 - z^2}, \quad \frac{dr}{d\varrho} = \frac{\varrho - z\frac{dz}{d\varrho}}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}}.$$

Führt man diese Werte in das Integral

$$t = \int \frac{r \sqrt{\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du}{\sqrt{2r^2 [U+h] - c^2}}$$

ein, so wird letzteres übergeführt in:

$$t = \int \frac{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho z \frac{dz}{d\varrho} + \varrho^2 \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2}\, d\varrho}{\sqrt{2(\varrho^2 - z^2)\left[\frac{\mu}{2\varrho^2} + h\right] - c^2}}$$

$$= \int \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - 2\varrho z \frac{dz}{d\varrho} + \varrho^2 \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2}\, d\varrho}{\sqrt{2(\varrho^2 - z^2)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}.$$

In dem Integral ist z^2 als Funktion von ϱ anzusehen und es sind alle Fälle $z^2 = \psi(\varrho)$ zu bestimmen, für welche das Integral elliptisch wird. Die Fälle, in denen z selbst gleich einer rationalen Funktion ist, lassen sich gleichzeitig behandeln, wenn man jedesmal dann, wenn der Grad von $f'(\varrho)$ eine gerade Zahl ist, auch den Fall untersucht, wo $\psi(\varrho) = f^2(\varrho)$ gleich einem vollständigen Quadrat ist. Es möge $\varkappa$ den Grad des Zählers, k den Grad des Nenners von $\psi(\varrho)$ bezeichnen.

$$\varkappa = 1$$
$$k = 0$$

a) $z^2 = a + b\varrho$. Die Annahme ergibt kein Resultat.

b) $z^2 = m\varrho$, $z = \sqrt{m}\sqrt{\varrho}$, $\frac{dz}{d\varrho} = \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{\varrho}}$,

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - \varrho\sqrt{m}\sqrt{m} + \frac{\varrho m}{4}}\, d\varrho}{\sqrt{2(\varrho^2 - m\varrho)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}.$$

Die Annahme ist möglich und man erhält:

$$z^2 = m\varrho = m\sqrt{r^2 + z^2}.$$

$$\mathbf{z^4 - m^2(r^2 + z^2) = 0.}$$

$$\varkappa = 2$$
$$k = 0, \quad z^2 = a + b\varrho^2,$$

$$z = \sqrt{a + b\varrho^2}, \quad \frac{dz}{d\varrho} = \frac{b\varrho}{\sqrt{a + b\varrho^2}}.$$

Dann wird:

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 (a + b\varrho^2) - 2b\varrho^2 (a + b\varrho^2) + b^2 \varrho^4}\, d\varrho}{\sqrt{a + b\varrho^2} \sqrt{2(-a)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}.$$

Setzt man $b = 1$, so wird:

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{a\varrho^2 - 2a\varrho^2}\, d\varrho}{\sqrt{a + \varrho^2} \sqrt{2(-a)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}.$$

Damit die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen > 0 werden, ist erforderlich, dafs $a < 0$ ist. Es sei $a = -m^2$, dann wird $z^2 = \varrho^2 - m^2$, also $r^2 = m^2$. Also ergibt sich der Kreiszylinder.

b) $z^2 = a + b\varrho + d\varrho^2$,

$$z = \sqrt{a + b\varrho + d\varrho^2}, \quad \frac{dz}{d\varrho} = \frac{b + 2d\varrho}{2\sqrt{a + b\varrho + d\varrho^2}},$$

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{4(a + b\varrho + d\varrho^2)\varrho^2 - 4\varrho(a + b\varrho + d\varrho^2)(b + 2d\varrho) + \varrho^2(b + 2d\varrho)^2}\, d\varrho}{\sqrt{a + b\varrho + d\varrho^2} \sqrt{2(\varrho^2 - a - b\varrho - d\varrho^2)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}.$$

Aus dem Zähler läfst sich $\sqrt{\varrho}$ absondern. Setzt man $d = 1$, so fallen die Glieder mit ϱ^3 fort und es bleibt im Zähler:

$$\varrho \sqrt{\varrho} \sqrt{-4b\varrho^2 + \varrho(-4a - 3b^2) - 4ab}.$$

a und b sind darin so zu bestimmen, dafs $a + b\varrho + \varrho^2$ ein vollständiges Quadrat wird, und zwar mufs b negativ sein, damit die Wurzel im Zähler reell wird. Ist $a = \alpha^2$, so ist, da $d = 1$ angenommen war, $b = -2\alpha$, also:

$$\sqrt{-4b\varrho^2 + \varrho(-4a - 3b^2) - 4ab} = \sqrt{8\alpha\varrho^2 + \varrho(-4\alpha^2 - 12\alpha^2) + 8\alpha^3}$$
$$= \sqrt{8\alpha} \sqrt{\varrho^2 - 2\alpha\varrho + \alpha^2} = \sqrt{8\alpha}\,(\varrho - \alpha)^2.$$

Also ist

$$z^2 = (\varrho - \alpha)^2,$$
$$z = \varrho - \alpha.$$
$$z + \alpha = \sqrt{r^2 + z^2}.$$
$$r^2 = 2\alpha\left(z + \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{Paraboloid},$$

bei dem das Anziehungszentrum im Brennpunkt liegt.

$$\begin{matrix} n = 3 \\ k = 0 \end{matrix}, \quad z^2 = m\varrho^3, \quad \frac{dz}{d\varrho} = \sqrt{m}\,\frac{3}{2}\sqrt{\varrho},$$

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - 2\sqrt{m}\sqrt{\varrho^3}\,\varrho\sqrt{m}\,\frac{3}{2}\sqrt{\varrho} + \varrho^2\frac{9}{4}m\varrho}}{\sqrt{2(\varrho^2 - m\varrho^3)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}\, d\varrho.$$

Die Annahme ist möglich, und es wird $z^2 = m\sqrt{r^2 + z^2}^3$. Setzt man $m = \frac{1}{a}$, so erhält man die Flächengleichung:

$$a^2 z^4 = (r^2 + z^2)^3.$$

$$\begin{matrix} \varkappa = 4 \\ k = 0 \end{matrix}, \quad z^2 = m\varrho^4. \quad z = \sqrt{m}\,\varrho^2, \quad \frac{dz}{d\varrho} = 2\sqrt{m}\,\varrho.$$

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - 2\sqrt{m}\,\varrho\,\varrho^2\,2\sqrt{m}\,\varrho + \varrho^2\,4m\varrho^2}}{\sqrt{2(\varrho^2 - m\varrho^4)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}\, d\varrho$$

Das Integral wird elliptisch, und es ist, wenn man $m = \frac{1}{4a^2}$ annimmt,

$$2az = r^2 + z^2.$$

$$r^2 + (z - a)^2 = a^2. \quad \text{Kugel.}$$

Das Anziehungszentrum liegt nicht im Mittelpunkt.

$$\begin{matrix} \varkappa = 3 \\ k = 1 \end{matrix}, \quad z^2 = \frac{a\varrho^3}{m + a\varrho}, \quad n = a.$$

$$z = \frac{\sqrt{a}\,\varrho^3}{\sqrt{m + a\varrho}}, \quad \frac{dz}{d\varrho} = \frac{\sqrt{a\varrho}\,(3m + 2a\varrho)}{2\sqrt{m + a\varrho}^3},$$

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - 2\varrho\sqrt{a\varrho^3}\sqrt{a\varrho}\,\frac{3m + 2a\varrho}{2\sqrt{m + a\varrho}} + a\varrho\,\frac{(3m + 2a\varrho)^2\varrho^2}{4(m + a\varrho)^3}}}{\sqrt{2\left(\varrho^2 - \frac{a\varrho^3}{m + a\varrho}\right)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}\, d\varrho$$

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{\begin{matrix} 4(m^3 + 3m^2 a\varrho + 3ma^2\varrho^2 + a^3\varrho^3) - 4a\varrho(3m^2 \\ + 5am\varrho + 2a^2\varrho^2) + a\varrho(9m + 12am\varrho + 4a^2\varrho^2) \end{matrix}}}{(m + a\varrho)\sqrt{2m\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2(m + a\varrho)}}\, d\varrho.$$

Im Zähler heben sich die Glieder mit ϱ^3 fort, daher ist das Integral elliptisch, und es ergibt sich:

$$z^2 = \frac{a\sqrt{r^2 + z^2}^3}{m + a\sqrt{r^2 + z^2}},$$

$$z^2 m = a\sqrt{r^2 + z^2}^3 - az^2\sqrt{r^2 + z^2}.$$

Ist $a = 1$, so erhält man die Fläche:

$$r^6 + r^4 z^2 = z^4 m^2.$$

$\varkappa = 4$, $k = 1$, $z^2 = \frac{m\varrho^4}{a + m\varrho}$. Kein Resultat.

$\varkappa = 0$, $k = 2$. Kein Resultat.

$\varkappa = 1$, $k = 2$. Kein Resultat.

$\varkappa = 2$, $k = 2$, $z^2 = \frac{\gamma^4\varrho^2}{(\alpha + \beta\varrho)^2}$. Kein Resultat.

$\varkappa = 3$, $k = 2$, $z^2 = \frac{a\varrho^2 + b\varrho^3}{m + n\varrho + p\varrho^2}$. Kein Resultat.

$\varkappa = 4$, $k = 2$. Ist $z^2 = \frac{(a+\varrho^2)^2}{m+\varrho^2}$, so wird

$$\frac{dz}{d\varrho} = \frac{\varrho(\varrho^2 + 2m - a)}{\sqrt{m+\varrho^2}^3}.$$

$$t = \int \varrho \sqrt{\frac{\varrho^2 - \frac{2\varrho(a+\varrho^2)}{\sqrt{m+\varrho^2}} \cdot \varrho \frac{\varrho^2+2m-a}{\sqrt{m+\varrho^2}^3} + \varrho^2 \frac{(\varrho^2+2m-a)^2}{(m+\varrho^2)^3}}{\sqrt{2\left(\varrho^2 - \frac{(a+\varrho^2)^2}{m+\varrho^2}\right)\left[\frac{\mu}{2} + h\varrho^2\right] - c^2\varrho^2}}} \cdot d\varrho.$$

Unter dem Wurzelzeichen im Zähler bleibt $\varrho^4(m-2a) + \varrho^2(3m^2 - 8am + 3a^2) + m^3 - 4am^2 + 2a^2m$. Soll dieser Ausdruck gleich einem vollständigen Quadrat $= (A + B\varrho^2)^2$ sein, so müssen A und B folgende Gleichungen erfüllen:

(1) $A^2 = m^3 - 4am^2 + 2a^2m$,
(2) $2AB = 3m^2 - 8am + 3a^2$,
(3) $B^2 = m - 2a$.

Aus (1) folgt: $A = \sqrt{m}\sqrt{m^2 - 4am + 2a^2}$,
„ (3) „ $B = \sqrt{m - 2a}$.

Diese Werte in (2) eingesetzt, ergibt:

$$2\sqrt{m-2a}\sqrt{m^2-4am+2a^2}\sqrt{m} = 3m^2 - 8am + 3a^2,$$
$$5m^4 - 24am^3 + 42a^2m^2 - 32a^3m + 9a^4 = 0.$$

$m = a$ ist eine dreifache Wurzel der Gleichung. Die vierte Wurzel ist $m = \frac{9}{5}a$. Nur der Wert $m = \frac{9}{5}a$ ergibt eine Fläche.

Es ist: $z^2 = \frac{(a+\varrho^2)^2}{\frac{9}{5}a + \varrho^2}$, $z^2\left(\frac{9}{5}a + \varrho^2\right) = a^2 + 2a^2\varrho^2 + \varrho^4$.

Setzt man $a = 5b^2$, so ergibt sich:

$$z^2(9b^2 + \varrho^2) = (5b^2 + \varrho^2)^2.$$

Aus der Gleichung würde sich kein reeller Wert für r ergeben. a mufs < 0 sein, $= -5b^2$, dann wird:

$$z^2 = \frac{(\varrho^2 - 5b^2)^2}{\varrho^2 - 9b^2}.$$

$$(r^2 - 5b^2)^2 = z^2(b^2 - r^2).$$

Eine ähnliche Untersuchung bei der Annahme $r^2 = f(\varrho)$ ergibt in folgenden Fällen ein Resultat:

$r^2 = a\varrho$, $r^4 - a^2(r^2 + z^2) = 0$.
$r^2 = n\varrho^2$, $r^2 - mz^2 = 0$. Kegel.
$r^2 = \varrho^2 - m^2$, $z^2 = m^2$. Ebene.
$r^2 = \frac{\varrho^4}{4a^2}$, $z^2 + (r-a)^2 = a^2$. Ringfläche.

Die zuletzt aufgeführte Fläche entsteht dadurch, dafs sich ein Kreis mit dem Radius a um eine seiner Tangenten dreht.

Also führt die Bewegung eines Punktes, wenn die Kräftefunktion $= \frac{\mu}{2\varrho}$ ist, bei folgenden Flächen auf elliptische Integrale.

r^2	z^2	$f(r,z) = 0$
a_1	a_3	$r^2 - mz^2 = 0$
$a_2 + b_2 u$	$a_2 + b_2 u$	
$\frac{a_1}{u}$	u	$rz = a$
$\frac{1}{1+u}$	a_4	$r^2 + z^2 = a^2$
$b^2 + 2bu$	$\frac{a_3 + (1+a_3)u}{1+u}$	$r^2 = b(b + 2z)$
$1 + b^2 u$	u^2	$r^2 - z^2 = b^2$
u	$\frac{1}{u}$	
$\frac{m^2 u - 16m^4}{u}$	$\frac{(4m^2 + u)^2}{u}$	$(5m^2 - r^2)^2 = (m^2 - r^2)z^2$
$2a^2 - u$	$\frac{(u - a^2)^2}{u}$	$z^2(2a^2 - r^2) = (a^2 - r^2)^2$
$\frac{4m^2(u-1)}{u}$	$\frac{4m^2}{u^2}$	$r^2 + (z-m)^2 = m^2$
$\frac{b^2}{u}$	$\frac{b^2(1-u)}{u^2}$	$r^4 - b^2 r^2 = b^2 z^2$
—	$m\varrho$	$z^4 - m^2(r^2 + z^2) = 0$
—	$\frac{\varrho^3}{a}$	$a^2 z^4 = (r^2 + z^2)^3$
—	$\frac{\varrho^3}{m + \varrho}$	$z^4 m^2 = r^6 + r^4 z^2$
$\frac{\varrho^4}{4a^2}$	—	$(r-a)^2 + z^2 = a^2$

III.

Bestimmung der Flächen für die Kräftefunktion $U = \frac{\mu}{\varrho}$.

Auch bei der Annahme $U = \frac{\mu}{\varrho}$, wenn also die Anziehung nach dem Newtonschen Gesetz erfolgt, kann die Untersuchung wie im vorigen Kapitel geführt werden, indem man entweder ϱ^2 und z^2 als rationale Funktionen von u annimmt, oder die Flächengleichung als rationale Funktion von ϱ^2 und z^2, oder von ϱ^2 und r^2 annimmt.

Bei der Annahme $\varrho = a$, für die Kugel, führt die Aufgabe auf elementare Integrale. Für $r = a$, und $z = b$, also für Kreiszylinder und Ebene ergeben sich elliptische Integrale.

Es sollen zunächst die Fälle untersucht werden, in denen r^2 und z^2 rationale Funktionen von u sind.

Es sei $r^2 = \frac{F_1}{F_2}$, $z^2 = \frac{F_3}{F_4}$, wo $F_1 \dots F_4$ rationale Funktionen von u bezeichnen, sodann wird:

$$\varrho^2 = \frac{F_1 F_4 + F_2 F_3}{F_2 F_4}$$

und

$$t = \int \frac{\sqrt{F_3 F_4^3 [F_2 F_1' - F_1 F_2']^2 + F_1 F_2^3 [F_4 F_3' - F_3 F_4']^2}\ \sqrt{F_1 F_4 + F_2 F_3}}{\sqrt{F_2^3}\sqrt{F_3}\sqrt{F_4^3}\sqrt{2\mu F_1 \sqrt{F_2 F_4} + 2F_1 h \sqrt{F_1 F_4 + F_2 F_3} - c^2 F_2 \sqrt{F_1 F_4 + F_2 F_3}}}\, du.$$

Ist $\Gamma(u) = 2\mu F_1 \sqrt{F_2 F_4} + 2F_1 h \sqrt{F_1 F_4 + F_2 F_3} - c^2 F_2 \sqrt{F_1 F_4 + F_2 F_3}$, so ist die Bedingung dafür, dafs sich für t ein elliptisches Integral ergibt, die, dafs

$$\{F_3 F_4^3 (F_2 F_1' - F_1 F_2')^2 + F_1 F_2^3 (F_4 F_3' - F_3 F_4')^2\} \{F_3 F_2^3 F_4^3 \sqrt{F_1 F_4 + F_2 F_3}\} = G^2$$

wird.

Soll $U = \frac{u}{\varrho}$ eine rationale Funktion werden, so mufs ϱ^2 selbst das Quadrat einer rationalen Funktion sein. Es mufs also sowohl $F_2 F_4$ als auch $F_1 F_4 + F_2 F_3$ ein vollständiges Quadrat sein, oder es mufs sich für den Quotienten $\frac{F_1 F_4 + F_2 F_3}{F_2 F_4}$ ein vollständiges Quadrat ergeben. Bezeichnet man durch $\lambda_1 \dots \lambda_4$ den Grad von $F_1 \dots F_4$, durch γ den Grad von $\Gamma(u)$ und mit δ_1 und δ_2 den Grad von $\sqrt{F_2 F_4}$ und $\sqrt{F_1 F_4 + F_2 F_3}$, so müssen, soll $\Gamma(u)$ von nicht höherem als dem vierten Grade sein, folgende Gleichungen bestehen:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \delta_1 < 4, \\ \lambda^1 + \delta_2 \leqq 4, \\ \lambda_2 + \delta_2 \leqq 4. \end{cases}$$

λ_1 sowohl als auch λ_2 sollen der Reihe nach alle Werte von 0 bis 4 annehmen; mit diesen Werten sind die nach den Gleichungen (A) noch möglichen Werte von δ_1 und δ_2 zu kombinieren. Ist gleichzeitig λ_1 und $\lambda_2 = 0$, oder λ_3 und λ_4, so würde sich Zylinder oder Ebene ergeben; da für diese die Aufgabe möglich ist, so sollen diese Fälle von der Untersuchung ausgeschlossen sein.

Bei der Untersuchung kann in einigen Fällen der Satz angewandt werden:

(4) Ist $\gamma = 4$ oder der Grad von $F_3 > \gamma'$ so läfst sich

$$\{F_3 F_4^3 (F_2 F_1' - F_1 F_2')^2 + F_1 F_2^3 (F_4 F_3' - F_3 F_4')^2\} F_3 F_2^3 F_4^3 \sqrt{F_1 F_4 + F_2 F_3}$$

nur dann als Quadrat einer ganzen Funktion bestimmen, wenn F_3 quadratisch ist oder $F_3 = F_2$ wird oder in $F_1 F_2^3$ als Faktor enthalten ist.

(A) $\lambda_1 = 0$, 1) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$, $F_1 = a_1$, $F_2 = a_2 + b_2 u$.

Soll $F_2 F_4$ gleich einem vollständigen Quadrat sein, so mufs $F_2 = F_4$ sein und es ist in $\Phi = F_1 F_4 + F_2 F_3 = a_1 (a_2 + b_2 u) + (a_2 + b_2 u) F_3$, F_3 so zu bestimmen, dafs Φ gleich einem vollständigen Quadrat wird, und zwar, da $\delta_2 =$ ist, gleich einer Konstanten. F_3 kann nicht vom ersten oder höherem Grade angenommen werden, da in dem Falle ein Glied mit u^2 oder von höherem Grade auftreten würde, also mufs F_3 gleich einer Konstanten sein $= a_3$.

Dann wird $\Phi(u) = a_1(a_2 + b_2 u) + a_3(a_2 + b_2 u)$ und es mufs sein:

$$a_1 b_2 + a_3 b_2 = 0,$$

also $a_1 = -a_3$ und

$$r^2 = \frac{a_1}{a_2 + b_2 u}, \quad z^2 = \frac{-a_1}{a_2 + b_2 u},$$

also $r^2 + z^2 = 0$. Diese Gleichung stellt keine Fläche dar.

b) $\delta_2 = 1$, $\Phi = a_1(a_2 + b_2 u) + (a_2 + b_2 u) F_3 = (a_2 + b_2 u)(a_1 + F_3)$.

F_3 ist so zu bestimmen, dafs Φ vom zweiten Grade, also $F_3 + a_1 = a^2 u$ wird.

$$F_3 = a^2 u - a_1,$$

also wird:

$$r^2 = \frac{a}{u}, \quad z^2 = \frac{a^2 u - a_1}{u}. \quad r^2 + z^2 = a^2. \text{ Kugel.}$$

c) $\delta_2 = 2$. Die Annahme ergibt kein Resultat, da F_3 nicht quadratisch ist und sich aus dem Ausdruck

$$F_3 F_4^3 (F_2 F_1' - F_1 F_2')^2 + F_1 F_2^3 (F_4 F_3' - F_3 F_4')^2$$

nicht absondern läfst.

d) $\delta_4 = 3$. Kein Resultat.

(2) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „

c) $\delta_2 = 2$. „ „

d) $\delta_2 = 3$. „ „

(3) $\delta_1 = 3$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 eine gebrochene Funktion ergeben würde.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat $(F_2 = u,\ F_4 = n u^5)$.

c) $\delta_2 = 2$. „ „

d) $\delta_2 = 3$. „ „

(4) $\delta_1 = 4$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergeben würde.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

c) $\delta_2 = 2$. $F_1 = a$, $F_2 = u$.

$F_3 = +A u^3 - a_1 n u^6$, $F_4 = n u^7$. Kein Resultat, wie vorher.

d) $\delta_2 = 3$. Kein Resultat, wie vorher.

II) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0, \quad F_1 = a, \quad F_2 = u^2$.

Aus $F_2 F_4 = a u^2$ folgt $F_4 = a$.

Aus $\Phi = a_1 a + u^2 F_3 = c$ würde sich für F_3 eine gebrochene Funktion von u ergeben, daher ist die Annahme ausgeschlossen.

b) $\delta_2 = 1, \quad F_1 = a, \quad F_2 = u^2$.

Aus $F_2 F_4 = a u^2$ folgt $F_4 = a$.

Aus $\Phi = a_1 a + u^2 F_3 = (\alpha + \beta u)^2$ würde sich für F_3 keine ganze Funktion ergeben.

c) $\delta_2 = 2, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = u^2, \quad F_4 = a,$

$$\Phi = a_1 a + u^2 F_3 = (\alpha + \beta u^2)^2.$$

Daraus würde folgen:

$$F_3 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta u^2 + \beta^2 u^4 - a_1 a}{u^2}.$$

Damit F_3 eine ganze Funktion wird, mufs $\alpha^2 = a_1 a$ sein, dann würde sich ergeben:

$$F_3 = 2\alpha\beta + \beta^2 u^2.$$

Da $\gamma = 4$, und F_3 nicht quadratisch ist, so ist die Annahme ausgeschlossen.

(2) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = u^2$.

Aus $F_2 F_4 = a u^4$ folgt $F_4 = a u^2$.

Aus $\Phi = a_1 a u^2 + u^2 F_3 = c$ würde sich für F_3 eine gebrochene Funktion von u ergeben.

b) $\delta_2 = 1, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = u^2$.

Aus $F_2 F_4 = a u^4$ folgt $F_4 = a u^2$.

Aus $\Phi = a_1 a u^2 + u^2 F_3 = m^2 u^2$ folgt $F_3 = m^2 - a a_1 = c$.

Die Annahme ist möglich und es wird:

$$r^2 = \frac{a_1}{u^2}, \quad z^2 = \frac{c}{a u^2},$$

also

$$\boldsymbol{r^2 - m z^2 = 0.} \quad \text{Kegel.}$$

c) $\delta_2 = 2, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = u^2, \quad F_3 = u^2 u^2 - a_1, \quad F_4 = u^2$.

F_3 läfst sich nicht als Quadrat einer ganzen Funktion bestimmen.

(3) $\delta_1 = 3$.

a) $\delta_2 = 0$.

Für F_3 würde sich eine gebrochene Funktion ergeben.

b) $\delta_2 = 1$, $F_1 = a_1$, $F_2 = u^2$, $F_3 = m^2 - a_1 u^2$, $F_4 = A u^4$. Kein Resultat, da F_3 nicht quadratisch ist.

c) $\delta_2 = 2$, $F_1 = a_1$, $F_2 = u^2$, $F_3 = (\alpha + \beta u)^2 - a_1 u^2$, $F_4 = u^4$. Da $\gamma = 4$ und F_3 nicht quadratisch ist und sich aus dem Klammerausdruck von (A) nicht absondern läfst, so ist die Annahme ausgeschlossen.

(4) $\delta_1 = 4$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „ $F_2 = u^2$, $F_4 = a u^6$.

c) $\delta_2 = 2$. „ „ $F_2 = u^2$, $F_4 = a u^6$.

III) $\lambda_2 = 3$.

(1) $\delta_1 = 3$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergeben würde.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

(2) $\delta_1 = 4$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „

IV) $\lambda_2 = 4$.

(1) $\delta_1 = 4$, $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergeben würde.

(B) $\lambda_1 = 1$, I) $\lambda_2 = 0$.

(1) $\delta_1 = 0$.

a) $\delta_2 = 0$, $F_1 = a_1 - u$, $F_2 = 1$, $F_3 = a + u$, $F_4 = 1$.

$$r^2 = a_1 - u, \quad z^2 = a + u.$$

$$r^2 + z^2 = m^2 \quad \text{Kugel.}$$

b) $\delta_2 = 1$, $F_1 = a_1 + b_1 u$, $F_2 = a_2 = 1$, $F_4 = 1$.

$$\Phi = (a_1 + b_1 u)\, a_4 + a_2 F_3 = (a + b u)^2.$$

$$F_3 = (a + b u)^2 - a_4 (a_1 + b_1 u).$$

Bestimmt man die Konstanten so, dafs $a_4 = 1$, $a^2 = a$, $2ab = b_1$ ist, so ergibt sich $F_3 = b^2 u^2$, die Annahme ist möglich, und man hat:

$$r^2 = a^2 + 2ab u, \quad z^2 = b^2 u^2.$$

$$r^2 = 2a \left(z + \frac{a}{2} \right) \quad \text{Paraboloid.}$$

Das Anziehungszentrum liegt im Brennpunkt des Paraboloids. Bei anderer Lage desselben würden sich in diesem Falle hyperelliptische Integrale ergeben.

c) $\delta_2 = 2$, $F_1 = u$, $F_2 = a_2$.

F_3 läfst sich nicht als Quadrat einer ganzen Funktion bestimmen; da F_3 nicht Bestandteil von $\Gamma'(u)$ sein kann, so ist die Annahme ausgeschlossen.

d) $\delta_2 = 3$. Kein Resultat. $F_1 = u$, $F_2 = a_2$.

e) $\delta_2 = 4$. „ „ $F_1 = u$, $F_2 = a_2$.

(2) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$, $F_1 = u$, $F_2 = a_2$, $F_3 = c - m^2u^3$, $F_4 = u^2$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

c) $\delta_2 = 2$. „ „

d) $\delta_2 = 3$. „ „ da F_3 nicht quadratisch ist.

e) $\delta_2 = 4$. „ „

(3) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „

c) $\delta_2 = 2$. „ „

d) $\delta_2 = 3$. „ „

(4) $\delta_1 = 3$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „ da F_3 nicht quadratisch ist.

c) $\delta_2 = 2$. „ „ Satz 4.

d) $\delta_2 = 3$. „ „ Satz 4.

II) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergeben würde.

b) $\delta_2 = 1$, $x^2 = \frac{a_1 + b_1 u}{u}$, $z^2 = \frac{bu - a_1}{u}$.

$$x^2 + z^2 = b_1 + b = c^2 \text{ Kugel.}$$

c) $\delta_2 = 2$. Kein Resultat. Satz 4.

d) $\delta_2 = 3$. „ „ Satz 4.

(2) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0$. Für F_3 würde sich keine ganze Funktion ergeben.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

c) $\delta_2 = 2$. „ „

d) $\delta_2 = 3$. „ „

(3) $\delta_1 = 3$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da F_3 keine ganze Funktion von u werden würde.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat. Satz 4.

c) $\delta_2 = 2$. „ „ Satz 4.

d) $\delta_2 = 3$. „ „

III) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$. Für F_3 würde sich keine ganze Funktion ergeben.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

c) $\delta_2 = 2$. „ „

(2) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0$. Für F_3 würde sich keine ganze Funktion ergeben.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

c) $\delta_2 = 2$. $r^2 = \dfrac{2\alpha u - \alpha^2}{u^2}$, $z^2 = \dfrac{(u-\alpha)^2}{u^2}$.

$$r^2 + z^2 = 1.$$

(3) $\delta_1 = 3$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergibt.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat. Satz 4.

c) $\delta_2 = 2$. „ „ Satz 3.

IV) $\lambda_2 = 3$.

(1) $\delta_1 = 3$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergeben würde.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

V) $\lambda_2 = 4$.

(1) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergibt.

(2) $\delta_1 = 3$. a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

(C) $\lambda_1 = 2$. I) $\lambda_2 = 0$.

(1) $\delta_1 = 0$.

a) $\delta_2 = 0$, $r^2 = a^2 + 2abu - u^2$,
$z^2 = (b-u)^2$, $r^2 + z^2 = a^2 + b^2$ Kugel.

b) $\delta_2 = 1$. Es sei $F_2 = F_4 = 1$. Es wird

$$\Phi = F_1 + F_3 = c^2 u^2.$$

Setzt man $F_1 = u^2 - 2bu - b^2$, so wird $F_3 = (c^2 - 1)u^2 + 2bu + b^2$

und wenn $c^2 - 1 = 1$ gesetzt wird, so ergibt sich: $F_3 = (u+b)^2$. Also wird:

$$r^2 = u^2 - 2bu - b^2, \quad z^2 = (u+b)^2.$$

Durch Elimination von u folgt daraus:

$$r^2 - z^2 + 4bz - 2b^2 = 0.$$

c) $\delta_2 = 2$. Ist $F_1 = a_1 + c_1 u^2$ und $F_2 = F_4 = 1$, so folgt aus $\Phi = F_1 + F_3$, $a_1 + c_1 u^2 + F_3 = m^2 u^4$. Setzt man $a_1 = -a^2$, $c_1 = 2am$, so wird:

$$F_3 = m^2 u^4 - 2amu^2 + a^2 = (mu^2 - a)^2.$$

$$r^2 = a(2mu^2 - a), \quad z^2 = (mu^2 - a)^2.$$

$$r^2 = 2a\left(z + \frac{a}{2}\right) \quad \text{Paraboloid.}$$

(2) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „ $F_1 = u^2$.

c) $\delta_2 = 2$. „ „ $F_1 = u^2$.

(3) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da F_3 nicht quadratisch ist.

b) $\delta_2 = 1$. „ „ „ „ „ „ „

c) $\delta_2 = 2$. „ „ „ „ „ „ „

II) $\lambda_2 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. $r^2 = \dfrac{b_1 u - u^2 - a^2}{u}, \quad z^2 = \dfrac{(u+a)^2}{u}.$

$r^2 + z^2 = 2a + b_1$ Kugel.

c) $\delta_2 = 2$. Kein Resultat, da F_3 nicht quadratisch ist.

(2) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergibt.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat, da F_3 nicht teilerfremd zu F_4 wird.

c) $\delta_2 = 2$. „ „ „ „ „ „ „ „ „

III) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „

c) $\delta_2 = 2$. „ „

(2) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

c) $\delta_2 = 2$. $r^2 = \frac{cu^2 + 2au - a^2}{u^2}$, $z^2 = \frac{(u-a)^2}{u^2}$ Kugel.

IV) $\lambda_2 = 3$.

(1) $\delta_1 = 2$.

a) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „

V) $\lambda_2 = 4$.

(1) $\delta_1 = 2$. a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergibt.

(D) $\lambda_1 = 3$. I) $\lambda_2 = 0$.

(1) $\delta_1 = 0$.

a) $\delta_2 = 0$. $r^2 = c - u^3$, $z^2 = u^3$ Kugel.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat, da F_3 nicht quadratisch ist.

(2) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da F_3 nicht quadratisch ist.

b) $\delta_2 = 1$. „ „ „ „ „ „ „

II) $\lambda_2 = 1$.

(1) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat, da sich für F_3 keine ganze Funktion ergeben würde.

b) $\delta_2 = 1$. Kein Resultat, da F_3 nicht quadratisch wird.

III) $\lambda_2 = 2$.

(1) $\delta_1 = 1$.

a) $\delta_2 = 0$. Kein Resultat.

b) $\delta_2 = 1$. „ „

In der anderen Art der Untersuchung wird, wie im vorigen Kapitel, die Flächengleichung als Funktion von ϱ^2 und z, oder als Funktion von ϱ^2 und r aufgefaßt.

Es sei $z^2 = \frac{\varphi(\varrho)}{\psi(\varrho)}$, dann wird:

$$t = \int \frac{\varrho \sqrt{\varrho - 2z\frac{dz}{d\varrho} + \varrho\left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2}\, d\varrho}{\sqrt{2(\varrho^2 - z^2)[\mu + h\varrho] - c^2\varrho}}.$$

Es sei $\varkappa$ der Grad von $\varphi(\varrho)$ und k der Grad von $\psi(\varrho)$.

$$\varkappa = 1,\ k = 0.\quad z^2 = m\varrho,\quad \frac{dz}{d\varrho} = \frac{m}{2\sqrt{m\varrho}}.$$

Die Annahme ist möglich und man hat:

$$z^4 - m^2(r^2 + z^2) = 0.$$

$\varkappa = 2,\ k = 0.$ a) $z^2 = a + b\varrho^2,\ b = 1,\ a = -\alpha^2.$

$r^2 = \alpha^2$ Kreiszylinder.

b) $z^2 = m^2\varrho^2,\quad r^2 - z^2\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right) = 0$ Kegel.

c) $z^2 = (b\varrho + \alpha)^2.$

$\alpha)\ b = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad r^2 - z^2 + 4az = 2a^2$ { Hyperboloid.

$\beta)\ b = 1,\quad r^2 = a(a - 2z)$ Paraboloid.

$\varkappa = 3,\ k = 0.\quad z^2 = b\varrho^3,\ b = \frac{1}{a},\quad a^2z^4 - (r^2+z^2)^3 = 0.$

$\varkappa = 4,\ k = 0.$ a) $z^2 = \frac{\varrho^4}{4b^2},\quad r^2 + (z-b)^2 = b^2.$

b) $z^2 = m + n\varrho^4.$ Kein Resultat.

$\varkappa = 0,\ k = 1.$ Kein Resultat.

$\varkappa = 0,\ k = 2, 3$ ergibt kein Resultat.

$\varkappa = 1,\ k = 1.$ Kein Resultat.

$\varkappa = 2,\ k = 1.$ „ „

$\varkappa = 3,\ k = 1,\quad z^2 = \frac{a\varrho^3}{m+n\varrho},\quad z = \frac{\sqrt{a\varrho^3}}{\sqrt{m+n\varrho}},$

$$\frac{dz}{d\varrho} = \frac{(3m+2n\varrho)\sqrt{a\varrho}}{2\sqrt{m+n\varrho^3}},$$

$$t = \int^{\varrho} \frac{\sqrt{\varrho - \frac{\sqrt{a\varrho^3}}{\sqrt{m+n\varrho}}\cdot\frac{(3m+2n\varrho)\sqrt{a\varrho}}{\sqrt{m+n\varrho^3}} + \varrho\frac{(3m+2n\varrho)^2 a\varrho}{4(m+n\varrho)^3}}\, d\varrho}{\sqrt{\varrho}\,\sqrt{2\left(\varrho - \frac{a\varrho^2}{m+n\varrho}\right)[\mu + h\varrho] - c^2}}.$$

Setzt man $n = a$, so läfst sich das Integral so umformen, dafs im Zähler und im Nenner unter dem Wurzelzeichen nur eine Funktion zweiten Grades steht, daher ist die Aufgabe möglich und man erhält:

$$r^2(m + a\varrho) = a\varrho^3,$$
$$z^2(m + a\sqrt{r^2+z^2}) = a\sqrt{r^2+z^2}^3,$$
$$a\sqrt{r^2+z^2}^3 - az^2\sqrt{r^2+z^2} = mz^2,$$
$$a^2(r^2+z^2)^3 - 2a^2z^2(r^2+z^2)^2 + a^2z^4(r^2+z^2) = m^2z^4,$$
$$a = 1,\qquad r^6 + r^4z^2 = m^2z^4.$$

Kein Resultat ergeben die Fälle:

$\varkappa = 4$	$\varkappa = 5$	$\varkappa = 0$	$\varkappa = 1$	$\varkappa = 2$	$\varkappa = 3$
$k = 1$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 2$	$k = 2$	$k = 2$

$$\varkappa = 4,\ k = 2.\quad z^2 = \frac{(a+\varrho^2)^2}{m+\varrho^2},\quad m = \frac{9}{5}\,a = -9\,b^2.$$

$$(r^2 - 5b^2)^2 = z^2\,(b^2 - r^2).$$

Fafst man r^2 als Funktion von ϱ auf, so ist die Art der Untersuchung dieselbe. Setzt man $r^2 = \frac{f_1}{f_2}$ und bezeichnet mit $\varkappa$ den Grad von f_1, mit k den Grad von f_2, so ergibt sich ein Resultat, wenn $\varkappa = 1$ und $k = 0$ ist, also:

$$r^2 = a\varrho,\quad r^4 - a^2\,(r^2 + z) = 0.$$

Die in den vorigen Kapiteln angewandten anderen Methoden der Untersuchung ergeben hier keine neuen Flächen. Die Flächen, für welche die Integrale (A) bei der Kräftefunktion $\frac{\mu}{\varrho}$ elliptisch werden, sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

r^2	z^2	$f(r, z - z_0)$
$\frac{a_1}{u}$	$\frac{a^2u - a_1}{u}$	$r^2 + z^2 = a^2$
$\frac{a_1}{u^2}$	$\frac{c}{au^2}$	$r^2 - mz^2 = 0$
$a^2 + 2abu$	b^2u^2	$2a\left(z + \frac{a}{2}\right) = r^2$
$u^2 - 2bu - b^2$	$(u+b)^2$	$r^2 - z^2 + 4bz - 2b^2 = 0$
—	$m\varrho$	$z^4 - m^2\,(r^2 + z^2) = 0$
—	$m^2\varrho^2$	$r^2 - z^2\,\frac{(1-m^2)}{m^2} = 0$
—	$\frac{\varrho^3}{a}$	$a^2z^4 - (r^2+z^2)^3 = 0$
—	$\frac{\varrho^4}{4b^2}$	$r^2 + (z-b)^2 = b^2$
—	$\frac{\varrho^3}{m+\varrho}$	$r^6 + r^4z^2 = m^2z^4$
—	$\frac{(a+\varrho^2)^2}{m+\varrho^2}$	$(r^2 - 5b^2)^2 = z^2\,(b^2 - r^2)$
$a\varrho$	—	$r^4 - a^2\,(r^2 + z^2) = 0$

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. Wangerin für die Anregung der Arbeit und die liebenswürdige Unterstützung bei der Ausführung derselben auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Am 23. Januar 1887 wurde ich, Martha Niemöller, Tochter des Geheimen Studienrates Realschuldirektor Dr. Niemöller in Emden, zu Leipzig geboren. Ich besuchte die Töchterschule in Osnabrück, ferner die Töchterschule und das Lehrerinnenseminar in Emden, das ich Ostern 1906 mit dem Zeugnis der Lehrbefähigung für mittlere und höhere Schulen verliefs. Nachdem ich als Hauslehrerin und an der höheren Töchterschule in Emden tätig gewesen war, bestand ich nach privater Vorbereitung die Reifeprüfung an der Oberrealschule in Göttingen Michaelis 1910. Von Michaelis 1910 bis Michaelis 1911 studierte ich in Berlin, von Ostern 1912 bis Michaelis 1914 in Halle Mathematik und Naturwissenschaften. Im Juli 1915 bestand ich das Staatsexamen.

Ich war dann in Hamburg am Elise-Averdieck-Lyzeum und Oberlyzeum und in Stargard an der Königin-Luise-Schule tätig. Seit Ostern 1914 bin ich am Lyzeum in Perleberg fest angestellt.

Ich nahm an den Vorlesungen und Übungen folgender Herren teil: Börnstein, Brüel, Dorn, Foerster, Fries, Gutzmer, Haecker, Hettner, Karsten, Knoblauch, Krueger, Menzer, Münsterberg, Neesen, Pringsheim, Ruhland, Schmidt, Schulz, Schwarz, Wangerin.

Alle meine hochverehrten Lehrer mögen meines bleibenden Dankes versichert sein.